

Д. А. Барамия¹, Н. И. Горбенко², М. М. Лаврентьев^{1,3}

¹Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

²Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН
пр. Академика Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия

³Институт автоматики и электрометрии СО РАН
пр. Академика Коптюга, 1, Новосибирск, 630090, Россия

baramiyadenis@gmail.com, nikolay.gorbenko@gmail.com, mmlavrentiev@gmail.com

ОПИСАНИЕ ДОЛГОВРЕМЕННОЙ ЭВОЛЮЦИИ БЕРЕГОВОГО ПРОФИЛЯ НА ОСНОВЕ ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ *

Рассматривается диффузионная модель для описания долговременной эволюции профиля глубин в прибрежной зоне. Для калибровки модели решалась обратная задача восстановления коэффициентов по дополнительным граничным условиям путем минимизации функционала невязки. Многомерная оптимизация функционала проводилась методом дифференциальной эволюции. Для вычисления профиля глубин применялся метод конечных элементов. Тестирование проводилось на базе данных JARKUS при различных пространственных и временных интервалах. Достигнута относительная погрешность описания эволюции берегового профиля на уровне не более 5 %.

Ключевые слова: эволюция берегового профиля, обратная задача, функционал невязки, дифференциальная эволюция, метод конечных элементов.

Введение

Возрастающее влияние деятельности человека на окружающую среду начинает приводить к заметным экологическим последствиям. Это относится, в частности, к инженерным сооружениям в прибрежной зоне, таким как дамбы, искусственные острова и каналы. Естественные процессы массопереноса приводят к постоянному изменению профиля глубин, что влечет за собой ощутимые последствия как для экологии прибрежной зоны, так и к необходимости дополнительных инженерных работ. Понимание механизмов, влияющих на изменение профиля глубин, а также возможность предсказания такого изменения позволяют минимизировать отрицательное влияние на экологию прибрежной зоны при проектировании и осуществлении инженерных работ.

* Работа выполнена при финансовой поддержке проекта 0319-2018-0010 IV.36.1.4. «Исследование и развитие методов и технологий построения интегрированных программно-аппаратных комплексов для задач моделирования и управления динамическими системами обработки и отображения данных». Регистрационный номер: АААА-А17-117062110016-4.

В настоящей работе рассматривается программный инструментарий решения задачи калибровки диффузионной модели для описания долговременной эволюции берегового профиля.

Для моделирования процесса долговременной эволюции профиля глубин в прибрежной зоне, в работе [1] была предложена следующая диффузионная модель:

$$\frac{\partial(\delta X)}{\partial t} = D(z) \frac{\partial^2(\delta X)}{\partial z^2} + \Psi(t, z, \delta X, \frac{\partial(\delta X)}{\partial z}), \quad (1)$$

где $\delta X(z, t)$ – изменение глубины на расстоянии z от береговой линии, $D(z)$ – коэффициент диффузии, Ψ – некоторая функция, описывающая внешние источники. Данная модель применима только для песчаного дна. Согласно [1] наличие компоненты Ψ дает возможность ввести эффекты случайных воздействий, различных процессов переноса и вмешательства человека (таких как добыча песка и полезных ископаемых). Что касается общих подходов по изучению долговременной эволюции берегового профиля, см. работы [2–6].

Модель (1) была выбрана в качестве основы для дальнейших исследований, со следующими изменениями:

- функция изменения глубины $\delta X(z, t)$ представлена как функция глубины $u(z, t)$;
- функция, описывающая внешние источники Ψ , по аналогии с другими физическими процессами, была выбрана как функция переноса вещества $C(z, t)u_z$;
- добавлена временная зависимость в коэффициент диффузии $D(z, t)$.

Постановка задачи

В данной работе мы предполагаем, что долговременная эволюция профиля глубин в прибрежной зоне описывается линейным диффузионным уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (D(z, t) \frac{\partial u}{\partial z}) + C(z, t) \frac{\partial u}{\partial z}, \quad 0 \leq z \leq H, \quad t > 0. \quad (2)$$

Параметр H представляет собой «расстояние замыкания», т. е. расстояние от береговой линии, где моделируемые процессы диффузии и переноса вещества практически не имеют влияния на изменение профиля глубин. Для решения уравнения (2), в качестве начальных и граничных условий использовались данные измерений (например, с помощью сонаров [7]) профиля глубин в прибрежной зоне:

$$u(z, 0) = u^{\text{meas}}(z, 0), \quad u(0, t) = u^{\text{meas}}(0, t), \quad u(H, t) = u^{\text{meas}}(H, t). \quad (3)$$

Поскольку основная информация, необходимая для описания эволюции профиля глубин, содержится в коэффициентах $D(z, t)$ и $C(z, t)$, задача состоит в подборе данных коэффициентов таким образом, чтобы уравнение (2) с начальными и граничными условиями (3) «оптимально» описывало измеренные данные, т. е. эволюцию профиля глубин. Термин «оптимально» означает, что разница между измеренными данными $u^{\text{meas}}(z, t)$ и вычисленным профилем $u^{\text{comp}}(z, t)$ должна быть возможно меньше.

Калибровка модели

Калибровка модели (вычисление коэффициентов $D(z, t)$ и $C(z, t)$) проводилась в пространственно-временной области $\Omega = \{0 \leq z \leq H, 0 \leq t \leq T\}$. Для получения лучшего приближения коэффициентов решалась обратная задача восстановления коэффициентов уравнения

(2) по дополнительным граничным условиям (данным измерений). Задача решалась путем минимизации функционала невязки на каждом шаге по времени [8; 9]:

$$\Phi(D(z, t_i), C(z, t_i)) = \int_z \left| u^{\text{meas}}(z, t_i) - u^{\text{comp}}(z, t_i, D(z, t_i), C(z, t_i)) \right| dz. \quad (4)$$

Для минимизации функционала невязки (4) использовался метод дифференциальной эволюции, реализованный в библиотеке «Pallas Solver»¹. Данный метод представляет собой стохастический алгоритм многомерной оптимизации, основанный на генетическом алгоритме. Общий принцип работы метода дифференциальной эволюции можно представить следующим образом (рис. 1).

1. Алгоритм генерирует начальную *популяцию*, состоящую из M случайных векторов n -мерного пространства, в котором определена целевая функция $f(x)$. Размерность популяции определяется эмпирически и задается в настройках алгоритма.

2. Выполняется воспроизводство *потомков* (набора векторов) текущего поколения с использованием стратегии *мутации* и *скрещивания*. Стратегия мутации генерирует новые мутантные вектора путем стохастического комбинирования векторов предыдущего поколения (*базовых векторов*). Стратегия скрещивания замещает координаты мутантных векторов на соответствующие координаты базовых векторов с некоторой вероятностью p . Значение p задается в настройках алгоритма.

3. Выполняется этап *селекции*. Если после скрещивания полученный *пробный вектор* оказывается лучше базового вектора (значение целевой функции улучшилось), то в новом поколении базовый вектор заменяется пробным.

4. На каждой итерации алгоритма (или с заданной периодичностью) определяется лучший вектор поколения для контроля скорости поиска оптимального решения. Помимо этого, на данном этапе проверяются условия остановки алгоритма, такие как достижение предельного количества итераций, нахождение глобального или субоптимального решения, неизменность лучшего вектора поколения на протяжении заданного предельного количества итераций.

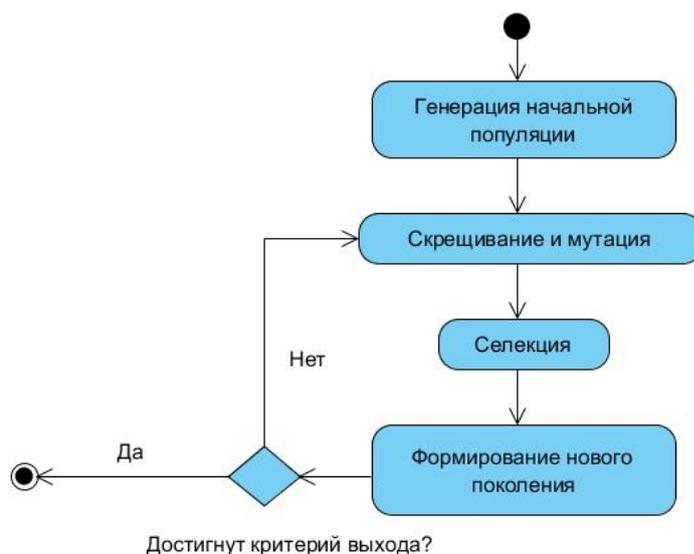


Рис. 1. Общая схема работы алгоритма дифференциальной эволюции

¹ <http://lattice.github.io/pallas-solver/> – библиотека «Pallas Solver» с открытым исходным кодом, содержащая набор алгоритмов глобальной оптимизации.

Преимущества метода дифференциальной эволюции заключаются в следующем: возможность применения к недифференцируемым, нелинейным, мультимодальным функциям от многих переменных; отсутствие требования начального приближения для искомого решения, что позволяет рассматривать решения разных порядков на области определения целевой функции; метод не пытается поддерживать одно текущее решение, а развивает популяцию кандидатов решений.

Для решения прямой задачи, а именно, вычисления профиля $u^{\text{comp}}(z, t)$ в области z при заданных значениях t_i , $D(z, t_i)$, $C(z, t_i)$ был реализован метод конечных элементов [10]. В качестве базисных функций для $u(z, t)$ и коэффициентов $D(z, t_i)$, $C(z, t_i)$ использовались полиномы первой степени по z на каждом интервале по времени. Другими словами, функции рассматривались как кусочно-линейные. Отладка и тестирование разработанного метода конечных элементов проводилась с использованием аналитически заданных функций по следующей схеме.

1. Аналитически задаем функцию $v(z, t)$ и коэффициенты $D(z, t_i)$, $C(z, t_i)$.
2. Определяем функцию $\varphi(z, t)$ вида

$$\varphi(z, t) = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(D(z, t) \frac{\partial v}{\partial z} \right) - C(z, t) \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (5)$$

3. Подставляем функцию (5) в исходное уравнение (2) в качестве правой части:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(z, t) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + C(z, t) \frac{\partial u}{\partial z} + \varphi(z, t). \quad (6)$$

4. Используя разработанный метод конечных элементов, вычисляем численное решение уравнения (6) и сравниваем с аналитическим решением $v(z, t)$.

Результаты тестирования показали, что относительная погрешность меньше 0,01 % при различных аналитически заданных функциях $v(z, t)$.

Тестирование диффузионной модели

Тестирование проводилось на многолетних данных измерений профиля глубин у побережья Голландии, которые собираются в рамках проекта JARKUS². Поскольку предложенная модель зависит только от одной пространственной переменной, задача рассматривается как одномерная относительно пространственных переменных. Поэтому для тестирования была выбрана одна точка на побережье (рис. 2), относительно которой и решалась задача калибровки модели.

Набор тестовых данных состоит из массива 201×34 точек (рис. 3): 201 точка наблюдений по расстоянию от берега с шагом 3 метра и 34 точки по времени с шагом 1 год. Калибровка модели выполнялась на временных интервалах длиной в 10 лет.

Точность описания измерений берегового профиля предложенной моделью оценивалась путем вычисления относительной ошибки (7) между измеренными данными $u^{\text{meas}}(z, t)$ и вычисленными данными $u^{\text{comp}}(z, t)$:

$$\delta(z, t) = 100\% \frac{\int_{z_1}^{z_2} \int_{t_1}^{t_2} |u^{\text{meas}}(z, t) - u^{\text{comp}}(z, t)| dz dt}{\int_{z_1}^{z_2} \int_{t_1}^{t_2} |u^{\text{meas}}(z, t)| dz dt}. \quad (7)$$

² <https://publicwiki.deltares.nl/display/OET/Dataset+documentation+JarKus>



Рис. 2. Остров Амеланд в Голландии

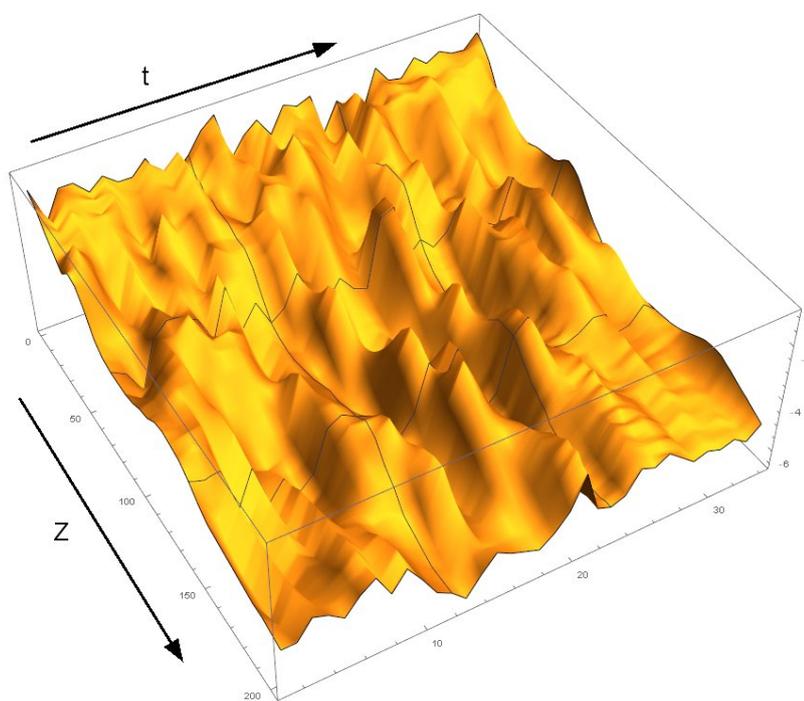


Рис. 3. Визуальное представление голландских данных эволюции берегового профиля

Относительная погрешность описания эволюции берегового профиля глубин на разных временных и пространственных интервалах, %

	$0 \leq t \leq 10$	$5 \leq t \leq 15$	$10 \leq t \leq 20$	$15 \leq t \leq 25$
$0 \leq z \leq H$	3,17	2,9	3,62	3,85
$H/10 \leq z \leq H$	3,01	2,23	2,53	2,71
$H/4 \leq z \leq H$	2,56	1,44	1,82	2,33

При тестировании использовались также разные пространственные интервалы. Это проводилось из соображений, что вблизи берега, помимо диффузии и переноса, существуют другие процессы, которые влияют на данные измерений. Из результатов, представленных в таблице,

видно, что при смещении пространственного интервала от берега относительная погрешность уменьшается. Также следует отметить, что при смещении окна по времени относительная погрешность вычисленных профилей сохраняется в пределах 5 %.

Заключение

Для моделирования процесса долговременной эволюции профиля глубин в прибрежной зоне использовалась диффузионная модель (2). Решалась задача подбора коэффициентов этой модели, которые обеспечивают соответствие решения данным измерений. Для получения лучшего приближения коэффициентов решалась обратная задача путем минимизации функционала невязки (4). Модель тестировалась на наборе данных JARKUS для различных пространственных и временных интервалов измерений. Из приведенных результатов видно, что предложенная диффузионная модель способна описать долговременную эволюцию профиля глубин с относительной погрешностью на уровне не более 5 %. В дальнейшем будет исследоваться возможность предсказания долговременной эволюции профиля глубин путем экстраполяции найденных коэффициентов по времени.

Список литературы

1. *De Vriend H. I., Capobianco M., Chesher T., Swart Th. E. de, Latteux B., Stive M. J. F.* Approaches to long-term modelling of coastal morphology: a Review // Coastal Engineering. Amsterdam: Elsevier Science Publ., 1993. Vol. 21. P. 225–269.
2. *Bakker W. T.* The dynamics of a coast with a groyne system // Proc. of the 11th Coastal Engineering Conference. American Society of Civil Engineers (ASCE). 1968. P. 492–517.
3. *Capobianco M.* A procedure for parameter identification of partial differential equations of parabolic type // G6-M Workshop “System Dynamics”, Delft Hydraulics. 1992.
4. *Dean R. G.* Equilibrium beach profiles: characteristics and applications // J. Coastal Res. 1991. Vol. 7. No. 1. P. 53–84.
5. *Hanson H.* GENESIS, a generalized shoreline change numerical model for engineering use // Univ. of Lund, Dept. of Water Res. Eng. 1987. Report Vol. 1007. 206 p.
6. *Larson M., Hanson H., Kraus N. C.* Analytical solutions of the one-line model of shoreline change // Report to U.S. Army Corps of Engineers, Coastal Engineering Research Center. 1987. 6 p.
7. *Beavers R., Howd P., Birkemeier W., Hathaway K.* Evaluating profile data and depth of closure with sonar altimetry // Proc. Hauppauge Coastal Sediments. 1999. Vol. 1. P. 479–490.
8. *Avdeev A. V., Lavrentiev M. M., Priimenko V. I.* Inverse Problems and Some Applications. Novosibirsk, 1999. 342 p.
9. *Lavrentiev M. M., Romanov V. G., Shishatskii Y.* Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis // AMS Translations of Math. Monographs. 2017. 290 p.
10. *Larson M. G., Bengzon F.* The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications. Springer, 2013. 395 p.

Материал поступил в редколлегию 10.10.2018

Д. А. Барамия¹, Н. И. Горбенко², М. М. Лаврентьев^{1,3}

¹ Novosibirsk State University
1 Pirogov Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation

² Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS
6 Academician Lavrentiev Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation

³ Institute of Automation and Electrometry SB RAS
1 Academician Koptuyug Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation

baramiyadenis@gmail.com, nikolay.gorbenko@gmail.com, mmlavrentiev@gmail.com

DESCRIPTION OF COASTAL PROFILE LONG TERM EVOLUTION BY DIFFUSION MODEL

Diffusion model is considered to describe coastal depth profile. For model calibration an inverse problem for equation coefficient reconstruction was solved by minimization of a certain misfit func-

tional using an extra boundary conditions. Multy-dimensional optimization was arranged with the help of differential evolution method. Finite elements method was used to calculate model depth profile. The JARKUS dataset was used for testing at different temporal and spatial intervals. Relative error at the level of 5 % was achieved.

Keywords: coastal profile evolution, inverse problem, cost functional, differential evolution, finite element method.

References

1. De Vriend H. I., Capobianco M., Chesher T., Swart Th. E. de, Latteux B., Stive M. J. F. Approaches to long-term modelling of coastal morphology: a Review. *Coastal Engineering*. Amsterdam: Elsevier Science Publ., 1993, vol. 21, p. 225–269.
2. Bakker W. T. The dynamics of a coast with a groyne system. *Proc. of the 11th Coastal Engineering Conference. American Society of Civil Engineers (ASCE)*, 1968, p. 492–517.
3. Capobianco M. A procedure for parameter identification of partial differential equations of parabolic type. *G6-M Workshop "System Dynamics", Delft Hydraulics*. 1992.
4. Dean R. G. Equilibrium beach profiles: characteristics and applications. *J. Coastal Res.*, 1991, vol. 7, no. 1, p. 53–84.
5. Hanson H. GENESIS, a generalized shoreline change numerical model for engineering use. *Univ. of Lund, Dept. of Water Res. Eng.*, 1987, vol. 1007, 206 p.
6. Larson M., Hanson H., Kraus N. C. Analytical solutions of the one-line model of shoreline change. *Report to U.S. Army Corps of Engineers, Coastal Engineering Research Center*, 1987, 6 p.
7. Beavers R., Howd P., Birkemeier W., Hathaway K. Evaluating profile data and depth of closure with sonar altimetry. *Proc. Hauppauge Coastal Sediments*, 1999, vol. 1, p. 479–490.
8. Avdeev A. V., Lavrentiev M. M., Priimenko V. I. Inverse Problems and Some Applications. Novosibirsk, 1999, 342 p.
9. Lavrentiev M. M., Romanov V. G., Shishatskii Y. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. *AMS Translations of Math. Monographs*, 2017, 290 p.
10. Larson M. G., Bengzon F. The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications. Springer, 2013. 395 p.

Received 10.10.2018

For citation:

Baramiya D. A., Gorbenko N. I., Lavrentiev M. M. Description of Coastal Profile Long Term Evolution by Diffusion Model. *Vestnik NSU. Series: Information Technologies*, 2018, vol. 16, no. 4, p. 13–19. (in Russ.) DOI 10.25205/1818-7900-2018-16-4-13-19