

Научная статья

УДК 519.6, 517.95

DOI 10.25205/1818-7900-2025-23-4-5-22

Численное решение коэффициентной обратной задачи электроимпедансной томографии с использованием лабораторных измерений

**Анна Александровна Афанасьева
Александр Васильевич Старченко**

Томский государственный университет
Томск, Россия

anna.afanaseva@stud.tsu.ru
starch@math.tsu.ru

Аннотация

Представлен итерационный численный метод решения обратной коэффициентной задачи для однородного эллиптического уравнения с интегро-дифференциальными граничными условиями в замкнутой области. Метод опирается на конечно-объемные аппроксимации дифференциальных и интегральных операторов на неструктурированных сетках, численное решение последовательности прямых задач при известном кусочно-постоянном распределении коэффициентов разностного эллиптического уравнения и сходящийся итеративно регуляризованный метод Гаусса – Ньютона. Разработанный метод решения обратных задач электроимпедансной томографии прошел тестирование на измерениях электрического напряжения, выполненных на экспериментальном стенде КИТ в университете Восточной Финляндии. Получены близкие к реальным результатам реконструкции электрической проводимости внутри области исследования.

Ключевые слова

коэффициентная обратная задача, уравнение эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами, интегро-дифференциальное граничное условие, метод конечного объема, неструктурированные сетки, полная электродная модель, реконструкция проводимости, итеративно регуляризованный метод Гаусса – Ньютона

Финансирование

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект развития региональных математических центров).

Для цитирования

Афанасьева А. А., Старченко А. В. Численное решение коэффициентной обратной задачи электроимпедансной томографии с использованием лабораторных измерений // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2025. Т. 23, № 3. С. 5–22. DOI 10.25205/1818-7900-2025-23-4-5-22

© Афанасьева А. А., Старченко А. В., 2025

Numerical solution of the coefficient inverse problem of electrical impedance tomography using laboratory measurements

Anna A. Afanaseva, Alexander V. Starchenko

Tomsk State University
Tomsk, Russian Federation
anna.afanaseva@stud.tsu.ru
starch@math.tsu.ru

Abstract

An iterative numerical method for solving the inverse coefficient problem for a uniform elliptic equation with integro-differential boundary conditions in a closed domain is presented. The method relies on finite-volume approximations of differential and integral operators on unstructured grids, numerical solution of a sequence of direct problems with a known piecewise constant distribution of coefficients of a difference elliptic equation, and the convergent iteratively regularizable Gauss-Newton method. The developed method for solving inverse problems of electrical impedance tomography has been tested on electrical voltage measurements performed at the KIT experimental stand at the University of Eastern Finland. The results of reconstruction of electrical conductivity within the research area are close to the real ones.

Keywords

coefficient inverse problem, elliptic equation with piecewise constant coefficients, integro-differential boundary condition, finite volume method, unstructured grids, complete electrode model, conduction reconstruction, iteratively regularized Gauss-Newton method

Funding

The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project for the development of regional mathematical centers).

For citation

Afanaseva A. A., Starchenko A. V. Numerical solution of the coefficient inverse problem of electrical impedance tomography using laboratory measurements. *Vestnik NSU. Series: Information Technologies*, 2025, vol. 23, no. 4, pp. 5–22 (in Russ.) DOI 10.25205/1818-7900-2025-23-4-5-22

Введение

Электроимпедансная томография (ЭИТ) – это метод компьютерной визуализации внутренней структуры изучаемого объекта по полученному распределению значений коэффициента электропроводности объекта на основе измерений тока и напряжения на поверхности объекта с помощью прикрепленных электродов [1–3]. Механизм работы ЭИТ включает следующие шаги (рис. 1):

1. На поверхность исследуемого объекта (например, тело человека) накладывается специальная сетка из электродов. Количество электродов может варьироваться в зависимости от размера исследуемой области и требуемой разрешающей способности изображения внутренней структуры. Electrodes should ensure good contact with the skin to ensure accuracy of measurements. To improve contact, conductive gel is often used.

2. Через электроды пропускается слабый, безопасный для человека электрический ток низкой частоты. Сила тока тщательно контролируется и находится в пределах, безопасных для организма. Пациент не ощущает никакого дискомфорта во время прохождения тока.

3. При прохождении тока через ткани объекта сопротивление измеряется между парами электродов. Различные ткани обладают разным электрическим сопротивлением (импедансом), что зависит от их электропроводности, которая, в свою очередь, определяется содержанием воды, ионов и других компонентов. Например, легкие, заполненные воздухом, имеют высокое сопротивление (низкие значения электрической проводимости), а ткани органов, богатых водой, обладают низким сопротивлением (высокие значения электрической проводимости).

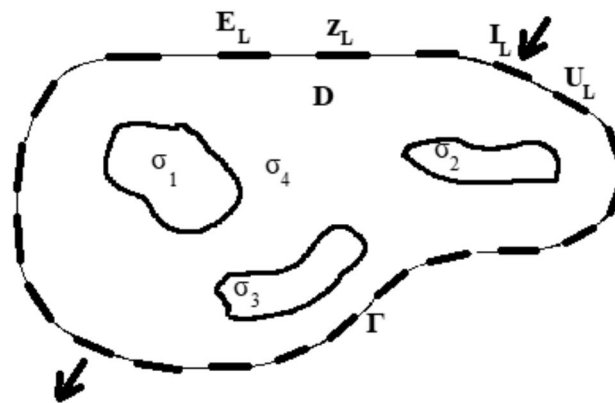


Рис. 1. Модель объекта, на которую нанесены электроды, с внутренними неоднородностями, σ – электрическая проводимость, $\{z_L\}$ – сопротивление на электродах, $\{I_L\}$ – электрический ток, $\{U_L\}$ – измеренное напряжение, E_L – размер электрода, L – количество электродов

Fig. 1. Model of the object on which the electrodes are applied, with internal inhomogeneities, σ – electrical conductivity, $\{z_L\}$ – resistance at the electrodes, $\{I_L\}$ – electrical current, $\{U_L\}$ – measured voltage, E_L – size of the electrode, L – number of electrodes

4. Измеренные на электродах значения электрического тока и напряжения обрабатываются с помощью специальных численных алгоритмов. Эти алгоритмы позволяют реконструировать изображение исследуемой области, отображающее распределение электрического импеданса тканей. Полученное изображение может быть визуализировано на экране монитора, подобно изображениям, получаемым с помощью других методов компьютерной томографии или магнитно-резонансной томографии [2; 3].

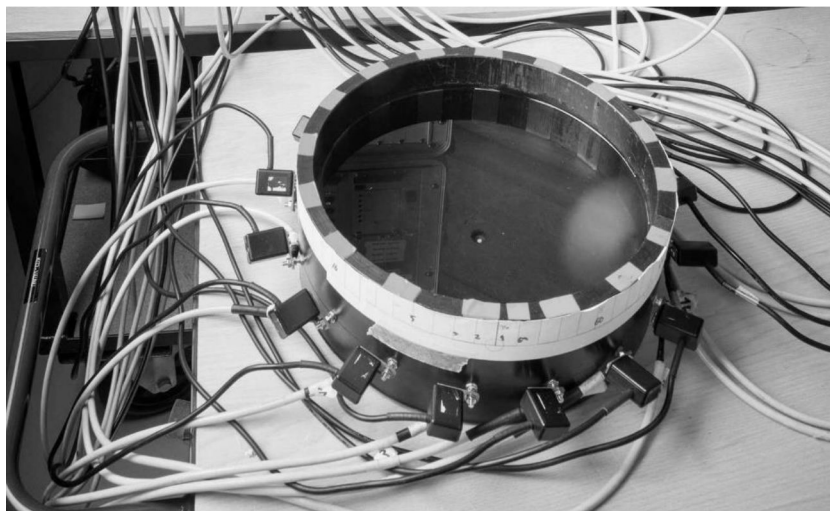


Рис. 2. Система измерения КИТ [6]
Fig. 2. The KIT4 measurement system [6]

Реконструкция распределения электрической проводимости внутри области исследования обычно осуществляется путем решения коэффициентной обратной задачи ЭИТ, которая является сложной и многогранной проблемой теоретической и прикладной математики. Многие исследователи для ее решения обращаются к приближенным аналитическим и численным методам, однако для тестирования разработанных вычислительных технологий зачастую приме-

няются так называемые «синтетические данные», полученные в результате решения прямых задач ЭИТ для различных способов подключения электрического тока через электроды и даже накладывая псевдослучайные возмущения на вычисленные значения электродных напряжений [4; 5].

В настоящее время находятся в свободном доступе данные измерений напряжения на электродах при различных токовых конфигурациях, полученных на измерительной системе КИТ (Kuorio Impedance Tomography) в университете Восточной Финляндии [6].

В измерительной системе КИТ исследования проводились в резервуаре цилиндрической формы с диаметром 28 см (рис. 2). Внутренняя поверхность резервуара была оснащена шестнадцатью прямоугольными электродами из нержавеющей стали, каждый из которых имел размеры 7 см в высоту и 2,5 см в ширину. Электроды были расположены на равных расстояниях друг от друга, что способствовало симметричному распределению электрических полей внутри резервуара. Для удобства идентификации электроды были пронумерованы по часовой стрелке, начиная с верхнего, который обозначается как электрод 1. Исследования включали измерения разности электрического потенциала на электродах в различных условиях. Базовым экспериментом служили измерения с заполненным только водой резервуаром, что позволяет определить фоновое распределение электрической проводимости и оценить свойства самой измерительной системы, например, уровень шумов и паразитных емкостей. Далее проводились эксперименты с различными объектами, помещаемыми внутри заполненного водой резервуара: металлическое кольцо и пластиковые цилиндры разной формы. Металлическое кольцо, обладая высокой электропроводностью, должно существенно искажать электрическое поле, что позволяет оценить чувствительность системы к присутствию высокопроводящих объектов. Пластиковый цилиндр, наоборот, характеризуется низкой проводимостью, и его присутствие в резервуаре вызовет менее заметные, но все же регистрируемые изменения в распределении потенциала. В дополнение к этому исследовались более сложные конфигурации, такие как комбинация нескольких металлических колец или совокупность пластикового цилиндра и металлического кольца. Это позволяет изучить влияние взаимного расположения объектов на искажение электрического поля и оценить возможности системы КИТ для решения обратной задачи – реконструкции формы и положения объектов внутри среды по измеренным данным [6].

Многие исследователи в своих работах использовали данную систему КИТ для тестирования различных численных методов реконструкции изображений. В исследовании [4] рассматривается подход, основанный на глубоком обучении. Авторы предлагают обучать нейронную сеть для прямой реконструкции распределения проводимости по измеренным электрическим потенциалам на электродах. Обучение нейронной сети в работе [4] проводилось с использованием как синтетических данных, так и реальных экспериментальных данных, причем количество синтетических данных было существенно больше (>10000). Экспериментальные данные были собраны с помощью системы КИТ [6], которая измеряла электрические потенциалы на электродах, расположенных по периметру резервуара. В качестве объектов исследования использовались различные фантомы – модели, имитирующие реальные объекты с различными электрическими свойствами и геометрическими формами. Рассматривались объекты из твердого пластика и полые металлические кольца, отличающиеся высокой электрической проводимостью. Дискретизация моделируемой области проводилась с высоким разрешением – на 1 696 треугольных ячейках, что обеспечивало достаточно детальное описание распределения проводимости, но, с другой стороны, требовало большого количества необходимых для реконструкции данных. Авторы [4] подчеркивают, что их подход обеспечивает быструю, устойчивую и качественную визуализацию распределения проводимости в исследуемой области. Заслуживает внимания тот факт, что, несмотря на обучение нейронной сети на данных, содержащих только круглые включения, она продемонстрировала способность к обобщению

и давала удовлетворительные результаты реконструкции для объектов более сложной формы, таких как треугольники и прямоугольники.

В работе [7] представлен итерационный метод решения обратной задачи ЭИТ с применением регуляризации Тихонова. Этот метод отличается своей универсальностью и может применяться к задачам, которые являются некорректными, т. е. к задачам, когда входных данных недостаточно или они существенно искажены. Одной из ключевых особенностей метода является влияние параметра регуляризации, который позволяет «сглаживать» решение и делать процесс его сходимости более устойчивым, что выражается в последовательном уменьшении нормы целевой функции и ее градиента. В [7] метод регуляризации Тихонова основывается на минимизации специального функционала, который включает в себя два основных компонента: меру близости рассчитанных напряжений к исходным (измеренным) данным и слагаемое регуляризации, пропорциональное L2-норме градиента решения. Это означает, что при выборе параметра регуляризации α необходимо найти баланс между точностью аппроксимации данных и гладкостью полученного решения. В работе [7] параметр регуляризации подбирался вручную для каждого эксперимента, что, хотя и позволило получить приемлемые результаты, не гарантирует оптимальность и объективность оценки. Авторы приводят визуальные сравнения. Полученные реконструированные изображения, несмотря на уверенное обнаружение включений/неоднородностей, страдали от размытости, что затрудняло точную оценку размеров и формы обнаруженных объектов. Также в [7] использовалась и Π -регуляризация, которая в некоторой степени повышает четкость изображений.

В исследовании [8] применяется метод быстрого приближенного вывода, основанный на распространении математического ожидания, для изучения апостериорного распределения вероятностей, возникающего в результате байесовской постановки нелинейных обратных задач. Этот метод применяется к решению обратной задачи электроимпедансной томографии в полной электродной постановке, используя измерения системы КИТ [6]. Для численного решения задачи используется метод конечных элементов с кусочно-линейной аппроксимацией на сетке из 424 узлов и 750 треугольных элементов, локально уплотненной вблизи электродов, чтобы более точно описать измерения электрической проводимости в этой области. Проверка точности и эффективности метода проводилась на реальных данных, полученных при погружении пластиковых и металлических стержней в резервуар с водой [6]. Полученные результаты численного моделирования представлены в виде таблицы с относительными ошибками среднего значения и стандартного отклонения параметров.

Стоит подчеркнуть, что рассматриваемые подходы – итеративный метод и метод глубокого обучения – имеют свои преимущества и недостатки. Итеративные методы, как правило, более интерпретируемы и позволяют лучше понимать физические процессы, лежащие в основе решения обратной задачи. Однако они могут быть вычислительно более затратными и медленными, особенно для больших объемов данных. Методы глубокого обучения, напротив, могут быть более быстрыми и эффективными, но их «черный ящик» может затруднять понимание причин получаемых результатов и оценку их достоверности. Кроме того, качество реконструкции в методах глубокого обучения сильно зависит от качества и количества обучающих данных. Будущие исследования могут быть направлены на гибридные подходы, которые объединяют преимущества обоих методов, например, использование глубокого обучения для ускорения сходимости итеративных методов или использования итеративных методов для улучшения качества обучения нейронных сетей. Также важны исследования, направленные на повышение устойчивости методов к шуму и артефактам, которые неизбежно присутствуют в реальных экспериментальных данных [1–8].

Целью данной работы является применение разрабатываемого численного итеративно регуляризованного метода для решения обратной коэффициентной задачи ЭИТ на основе лабораторных измерений, выполненных с использованием измерительной системы КИТ [6].

Остальная часть статьи организована следующим образом. Сначала подробно рассматривается главная составная часть метода решения обратной задачи ЭИТ – математическая постановка и численный метод решения прямой задачи ЭИТ на неструктурированных сетках. Приводятся результаты его тестирования на измерениях КИТ. Затем описывается математическая постановка и численный метод решения обратной задачи ЭИТ, который опирается на итеративно регуляризованный метод Гаусса – Ньютона. Приводится блок-схема полного вычислительного процесса. Завершает статью раздел, в котором представлены результаты сравнения изображений численно реконструированной внутренней структуры с фотографиями реальных объектов и условий измерений. В заключении сформулированы основные результаты работы.

Математическая постановка и численный метод решения прямой задачи ЭИТ

Рассматривается двумерная область D с гладкой границей Γ , которая отчасти либо соединяется с электродами для пропускания слабого электрического тока небольшой частоты Γ_l ($l = 1, \dots, L$ – количество электродов), либо имеет общую границу Γ_{air} с непроницающей ток окружающей средой (см. рис. 1). В области $\bar{D} = D + \Gamma$ известно распределение электрической проводимости $\sigma(x, y) > 0$. Также известна используемая на электродах токовая конфигурация $\{I_l\}$ – способ подачи и приема электрического тока и значения силы тока на электродах. Внутренние источники тока отсутствуют. Магнитная напряженность пренебрежимо мала. Процесс стационарный.

Для рассматриваемых условий из уравнений Максвелла и закона Ома для проводников математическая постановка задачи нахождения распределения электрического потенциала $u(x, y)$ в $\bar{D} = D + \Gamma$ и значений электрического напряжения $\{U_l\}$ на электродах может быть записана следующим образом [9; 10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma \cdot \operatorname{grad}(u)) = 0, (x, y) \in D; \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma_{air}} = 0; \\ \left(u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma_l} = \frac{1}{E_l} \left(\int_{\Gamma_l} u \, ds + z_l I_l \right), l = 1, \dots, L; \\ U_l = \frac{1}{E_l} \left(\int_{\Gamma_l} u \, ds + z_l I_l \right); \int_{\Gamma_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = I_l, l = 1, \dots, L; \\ \sum_{l=1}^L I_l = 0; \sum_{l=1}^L U_l = 0; \end{array} \right. \quad (1)$$

В (1) $E_l > 0$, $z_l > 0$ – размеры и сопротивление (импеданс) l -го электрода. В работе [11] доказано, что такая постановка задачи обеспечивает получение единственного решения при определенных условиях на $u(x, y)$. На сегодняшний день такая постановка прямой задачи ЭИТ рассматривается как наиболее полно (с минимальной погрешностью) представляющая физические процессы передачи тока через биологические объекты [11; 12].

В данной работе численное решение прямой задачи ЭИТ (1) ищется с помощью метода конечного объема на неструктурированных сетках, покрывающих область \bar{D} . Построение неструктурированных сеток выполняется с помощью пакета Gambit, при этом особое внимание уделяется сгущению узлов сетки вблизи поверхности электродов Γ_l и границы контакта с окру-

жающей средой Γ_{air} . В качестве конечного объема рассматриваются барицентрические ячейки, окружающие каждый внутренний узел сетки (рис. 3).

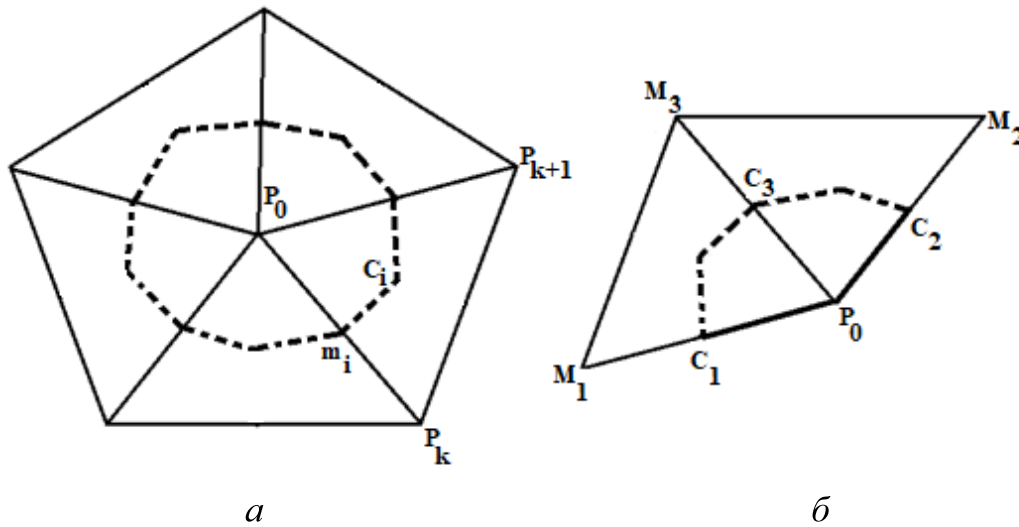


Рис. 3. Конечные объемы, используемые при получении разностной схемы: *a* – для внутреннего узла сетки; *b* – для граничного узла сетки
 Fig. 3. The final volumes used in obtaining the difference scheme: *a* – for the inner node of the grid, *b* – for the boundary node of the grid

При построении разностной схемы предполагается, что в каждой треугольной ячейке сетки значение электрической проводимости $\sigma(x, y)$ постоянно, а приближенное распределение электрического потенциала можно представить билинейной функцией следующего вида: $v(x, y) = a_k + b_k x + c_k y$, где $k = 1, \dots, NT$ – число треугольников неструктурированной сетки [13]. Значения постоянных величин $\{a_k, b_k, c_k\}$ могут быть выражены через приближенные значения потенциала в вершинах треугольника $P_0 P_k P_{k+1}$:

$$v^{(k)}(x, y) = v_{P_0} \Psi_{P_0}^{(k)}(x, y) + v_{P_k} \Psi_{P_k}^{(k)}(x, y) + v_{P_{k+1}} \Psi_{P_{k+1}}^{(k)}(x, y), \tag{2}$$

где $\Psi_{P_0}^{(k)}(x, y), \Psi_{P_k}^{(k)}(x, y), \Psi_{P_{k+1}}^{(k)}(x, y)$ – линейные базисные функции, причем они равны 1 только для своей вершины k -го треугольника, для остальных двух они равны 0. В связи с этим получается

$$\Psi_{P_0}^{(k)}(x, y) = \frac{1}{2S_k} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{P_k} & y_{P_k} \\ 1 & x_{P_{k+1}} & y_{P_{k+1}} \end{vmatrix}, \quad \Psi_{P_k}^{(k)}(x, y) = \frac{1}{2S_k} \begin{vmatrix} 1 & x_{P_0} & y_{P_0} \\ 1 & x & y \\ 1 & x_{P_{k+1}} & y_{P_{k+1}} \end{vmatrix},$$

$$\Psi_{P_{k+1}}^{(k)}(x, y) = \frac{1}{2S_k} \begin{vmatrix} 1 & x_{P_0} & y_{P_0} \\ 1 & x_{P_k} & y_{P_k} \\ 1 & x & y \end{vmatrix}, \quad S_k = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_{P_0} & y_{P_0} \\ 1 & x_{P_k} & y_{P_k} \\ 1 & x_{P_{k+1}} & y_{P_{k+1}} \end{vmatrix},$$

где S_k – площадь треугольника $\Delta P_0 P_k P_{k+1}$.

После интегрирования по конечному объему, внутри которого находится внутренний узел сетки P_0 (см. рис. 3), использования формулы Грина [14] и приближенного вычисления частных производных по x и по y с учетом (2) будет получена разностная схема следующего вида [13]:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{NT_0} \frac{\sigma_k}{4S_k} \left[v_{P_0} \left((y_{P_k} - y_{P_{k+1}})^2 + (x_{P_{k+1}} - x_{P_k})^2 \right) + \right. \\ & + v_{P_k} \left((y_{P_{k+1}} - y_{P_0})(y_{P_k} - y_{P_{k+1}}) + (x_{P_0} - x_{P_{k+1}})(x_{P_{k+1}} - x_{P_k}) \right) + \\ & \left. + v_{P_{k+1}} \left((y_{P_0} - y_{P_k})(y_{P_k} - y_{P_{k+1}}) + (x_{P_k} - x_{P_0})(x_{P_{k+1}} - x_{P_k}) \right) \right] = 0, \quad P_0 \in \omega_h. \end{aligned} \quad (3)$$

NT_0 – количество треугольников в барицентрической ячейке с общей вершиной P_0 . Суммирование выполняется по всем треугольным элементам сетки с общей вершиной P_0 , находящейся внутри области D , причем, когда значение индекса $k + 1$ становится больше NT_0 , то нужно его взять равным 1.

Для узлов P_0 , лежащих на границе, также строится конечный объем (см. рис. 3). Причем границы этого объема, находящиеся внутри области D , обрабатываются аналогично рассмотренным выше, а на криволинейных границах, совпадающих с Γ_l или Γ_{air} , напрямую используются граничные условия из интегро-дифференциальной постановки (1). Для приближенного вычисления интегралов по поверхности электродов от электрического потенциала используется формула трапеций, обеспечивающая второй порядок аппроксимации. В итоге для граничных узлов разностная схема будет выглядеть следующим образом [13]:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{NT_0} \frac{\sigma_k}{4S_k} \left[v_{P_0} \left((y_{P_k} - y_{P_{k+1}})^2 + (x_{P_{k+1}} - x_{P_k})^2 \right) + \right. \\ & + v_{P_k} \left((y_{P_{k+1}} - y_{P_0})(y_{P_k} - y_{P_{k+1}}) + (x_{P_0} - x_{P_{k+1}})(x_{P_{k+1}} - x_{P_k}) \right) + \\ & \left. + v_{P_{k+1}} \left((y_{P_0} - y_{P_k})(y_{P_k} - y_{P_{k+1}}) + (x_{P_k} - x_{P_0})(x_{P_{k+1}} - x_{P_k}) \right) \right] + \\ & + \frac{j_1 |C_1 P_0|}{z_l} \left(\frac{1}{2E_l} \sum_{n=1}^{N_l-1} (v_{P_n} + v_{P_{n+1}}) |P_n P_{n+1}| + \frac{z_l I_l}{E_l} - \frac{v_{P_{k-1}} + 3v_{P_0}}{4} \right) + \\ & + \frac{j_2 |P_0 C_2|}{z_l} \left(\frac{1}{2E_l} \sum_{n=1}^{N_l-1} (v_{P_n} + v_{P_{n+1}}) |P_n P_{n+1}| + \frac{z_l I_l}{E_l} - \frac{3v_{P_0} + v_{P_{k+1}}}{4} \right) = 0, P_0 \in \gamma_h. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $j_1 = 1$, если $P_{k-1} P_0 \in E_l$, иначе $j_1 = 0$; $j_2 = 1$, если $P_0 P_{k+1} \in E_l$, иначе $j_2 = 0$; N_l – количество узлов сетки на электроде с номером l .

Для того чтобы строки системы линейных уравнений (3)–(4) были линейно независимы, необходимо одно из уравнений системы заменить на условие единственности получения решения [11] из (1):

$$\sum_{l=1}^L U_l = \sum_{l=1}^L \frac{1}{E_l} \left(\int_{\Gamma_l} u ds + z_l I_l \right) = 0. \quad (5)$$

Приближенное представление (5) при использовании формулы трапеций для вычисления интегралов имеет вид

$$\sum_{l=1}^L \frac{1}{E_l} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_l-1} (v_{P_n} + v_{P_{n+1}}) |P_n P_{n+1}| + z_l I_l \right) = 0. \tag{6}$$

Таким образом, чтобы найти приближенное распределение электрического потенциала, нужно решить систему (3), (4), в которой одно уравнение заменено на (6).

Для решения полученной системы линейных уравнений, имеющей несимметричную матрицу без диагонального преобладания, может быть использован метод Гаусса с выбором главного элемента [15] или итерационный метод BiCGstab [16].

Для тестирования рассмотренного метода численного решения прямой задачи ЭИТ были проведены расчеты для условий заполненной только водой емкости КИТ для случая, когда через 5-й электрод подавался ток силой 2 мА, а 4-й электрод использовался для заземления. Для этого случая в исследовании [6] представлены результаты измерений напряжений на электродах (Case1-0 [6]). Значение электрической проводимости принято 0,0013 Ом⁻¹·м⁻¹. Была построена треугольная сетка (рис. 4, а), состоящая из NT = 1200 треугольных элементов и N = 657 узлов. Сетка была уплотнена в областях, близких к границе, для повышения точности расчетов.

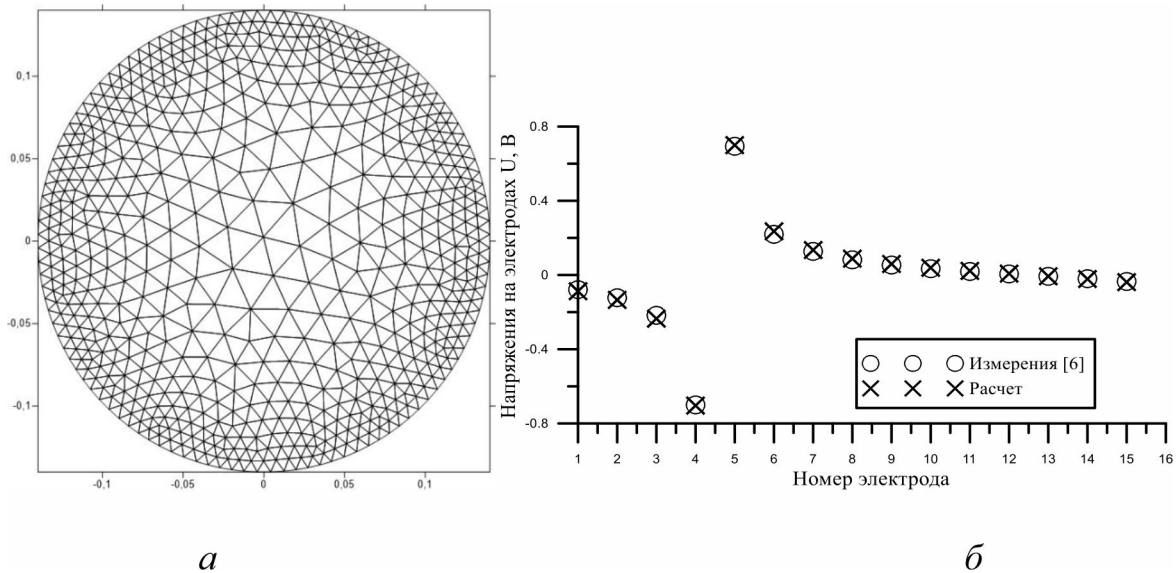


Рис. 4. Неструктурированная сетка, содержащая NT = 1200 треугольных ячеек и N = 657 узлов (а).
 Результаты сопоставления численного решения прямой задачи ЭИТ с измерениями (б) [6]
 Fig. 4. An unstructured grid containing NT = 1200 triangular cells and N = 657 nodes (а).
 The results of comparing the numerical solution of the direct EIT problem with measurements (б) [6]

На рис. 4, б представлены вычисленные и измеренные значения напряжений на электродах. Средняя абсолютная ошибка составила 0,018 В. Как видно из рисунков, имеет место хорошее согласование расчетов и измерений. Применяя подход, аналогичный методу Рунге оценки главного члена погрешности на последовательности вложенных сеток [15], можно установить, что порядок аппроксимации построенной разностной схемы близок ко второму.

Математическая постановка и численный метод решения обратной задачи ЭИТ

Обратная задача ЭИТ предполагает, что известны размеры области \bar{D} , места крепления, размеры и сопротивления электродов, измеренные на электродах значения силы тока $\{I_l\}$ и на-

пряжений $\{U_j\}$, и требуется для постановки (1) или ее разностного аналога найти распределение электрической проводимости внутри области D . То есть на основе измерений осуществить визуализацию внутренней структуры исследуемого объекта. Эта обратная коэффициентная задача относится к некорректно поставленным задачам, потому что получаемые распределения $\sigma(x, y)$ в значительной степени зависят от погрешностей измеряемых величин. Для решения такого сорта нелинейных плохо обусловленных задач часто применяется метод регуляризации А. Н. Тихонова [17–19], суть которого заключается в нахождении приближенного решения системы нелинейных уравнений за счет добавления к условию минимизации невязки условия минимизации нормы решения.

В данной работе с помощью регуляризации А. Н. Тихонова ищется решение обратной задачи σ^* , которое представляется в виде минимума функционала [7; 20]:

$$\sigma^* = \arg \min_{\sigma \in \Sigma} \left\{ \Phi_\alpha(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^M \left\| \bar{U}^\mu(\sigma) - \tilde{U}^\mu \right\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| \sigma - \sigma_0 \right\|_2^2 \right\}, \quad (7)$$

где $\frac{\alpha}{2} \left\| \sigma - \sigma_0 \right\|_2^2$ – регуляризирующий функционал; σ_0 – некоторое известное фоновое распределение проводимости; $\tilde{U}^\mu = (\tilde{U}_1^\mu, \tilde{U}_2^\mu, \dots, \tilde{U}_L^\mu)$ – измеренные с погрешностью значения напряжения для μ -й токовой конфигурации $\bar{I}^\mu = (I_1^\mu, I_2^\mu, \dots, I_L^\mu)$, M – количество таких конфигураций; $\bar{U}^\mu(\sigma) = (U_1^\mu(\sigma), U_2^\mu(\sigma), \dots, U_L^\mu(\sigma))$ – рассчитанные из решения прямых задач (3)–(4) при некотором распределении σ для μ -й токовой конфигурации; $\Sigma = \left\{ \sigma \in L^\infty(D) : c_0 \leq \sigma \leq c_1 \right\}$ – допустимый набор электрической проводимости, где c_0, c_1 – известны.

Чтобы рассчитать минимум функционала, воспользуемся методом Гаусса – Ньютона, основанным на линеаризации. Представим $\bar{U}^\mu(\sigma) \approx \bar{U}^\mu(\sigma^0) + \bar{J}^\mu(\sigma^0)(\sigma - \sigma^0)$, где $\bar{J}^\mu(\sigma^0) = \nabla_\sigma \bar{U}^\mu(\sigma^0)$ – якобиан от $\bar{U}^\mu(\sigma)$ по σ при некотором, близком к искомому решению, начальном приближении σ^0 . Подставляя это разложение в (7), получим линеаризованную задачу квадратичной минимизации:

$$\sigma^* = \arg \min_{\sigma \in \Sigma} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^M \left\| \bar{J}^\mu(\sigma - \sigma^0) - (\tilde{U}^\mu - \bar{U}^\mu(\sigma^0)) \right\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| \sigma - \sigma_0 \right\|_2^2 \right\},$$

решение которой представляется следующим образом:

$$\left[\sum_{\mu=1}^M \bar{J}^{\mu T}(\sigma^0) \bar{J}^\mu(\sigma^0) + \alpha I \right] (\sigma - \sigma^0) = - \left[\sum_{\mu=1}^M \bar{J}^{\mu T} (\tilde{U}^\mu(\sigma^0) - \tilde{U}^\mu) + \alpha (\sigma^0 - \sigma_0) \right]. \quad (8)$$

Система линейных уравнений (8) может быть решена прямым методом Холецкого [15], чтобы получить новую оценку для σ . Затем итеративно выполняется обновление реконструкции, принимая полученное решение в качестве первоначального предположения. На практике такая итеративная процедура обеспечивает сходимость в течение нескольких итераций [20], если дополнительно использовать монотонно уменьшающийся параметр регуляризации $\alpha_k > \alpha_{k+1} > 0$; $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$:

$$\sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)} - \left[\sum_{\mu=1}^M \bar{J}^{\mu T}(\sigma^{(k)}) \bar{J}^\mu(\sigma^{(k)}) + \alpha_k I \right]^{-1} \left[\sum_{\mu=1}^M \bar{J}^{\mu T} (\bar{U}^\mu(\sigma^{(k)}) - \tilde{U}^\mu) + \alpha_k (\sigma^{(k)} - \sigma_0) \right]. \quad (9)$$

Критерий останковки может быть основан на мониторинге относительного изменения таких величин, как $\Phi(\sigma^{(k)})$, $\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \|\bar{J}^\mu(\sigma^{(k)})\|_2^2}$ между последовательными итерациями.

На рис. 5 представлена блок-схема реализации итеративно регуляризованного метода Гаусса – Ньютона (9).

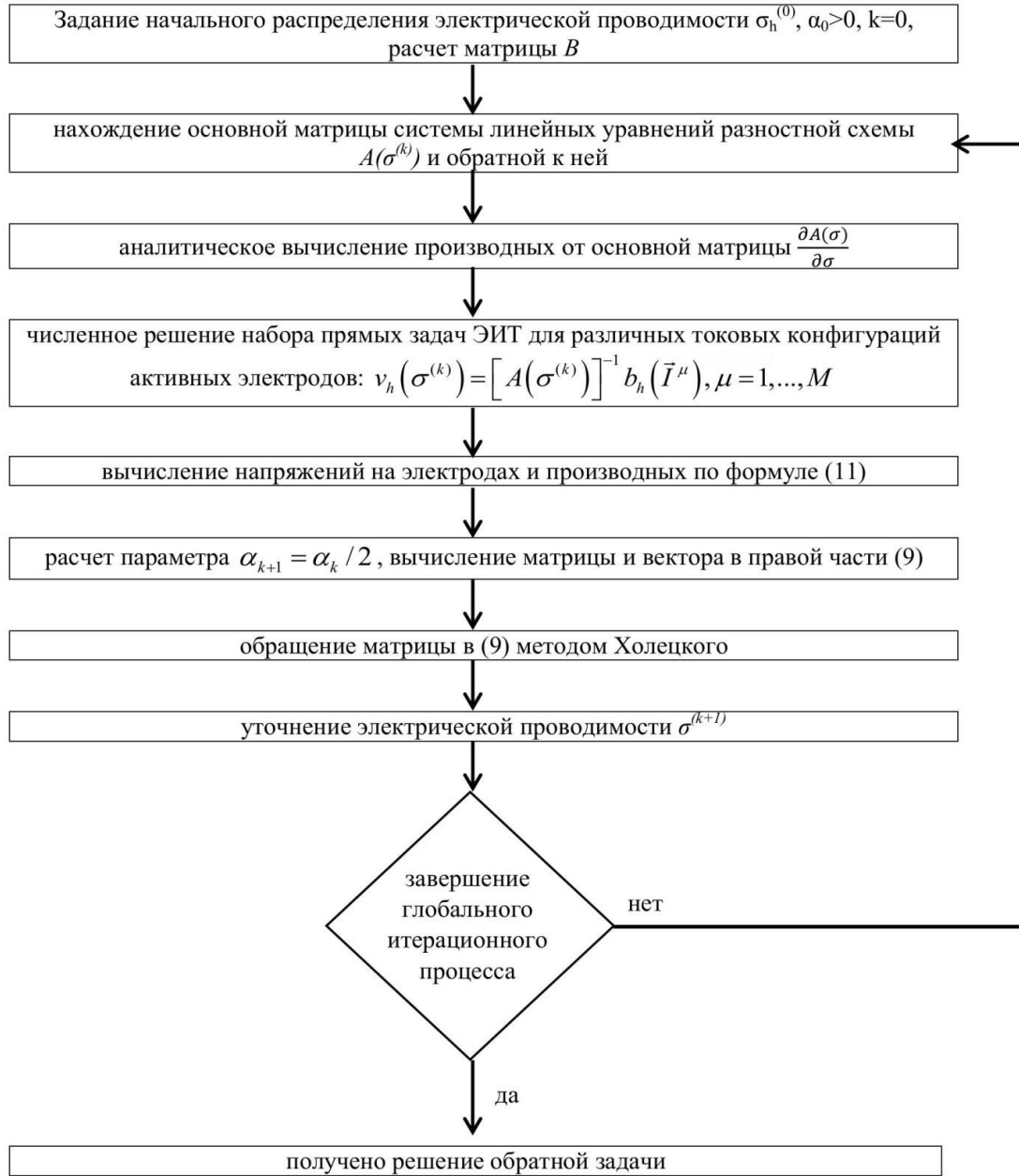


Рис. 5. Блок-схема итерационного процесса
Fig. 5. Block diagram of the iterative process

Заметим, что при вычислении значений якобиана можно воспользоваться следующим приемом [21]. В предыдущем разделе было показано, что при использовании выбранных вычис-

лительных технологий (метод конечного объема, барицентрические ячейки, кусочно-постоянные значения электрической проводимости и т. д.) получается система линейных уравнений (3), (4), (6), коэффициенты матрицы которой линейно зависят от электрической проводимости. Обозначим эту систему следующим образом:

$$A(\sigma)v_h = b_h(\vec{I}). \quad (10)$$

Искомые значения напряжений на электродах могут быть вычислены из формул (5) или (6) $\vec{U} = Bv_h + \vec{d}$, где вектор $\vec{d} = \left(\frac{z_1 I_1}{E_1}, \frac{z_2 I_2}{E_2}, \dots, \frac{z_L I_L}{E_L} \right)$, а B – это матрица размером $L \times N$, в которой ненулевые элементы суть коэффициенты квадратурной формулы трапеций. Предполагая обратимость матрицы $A(\sigma)$, можно записать:

$$\vec{U}(\sigma) = B[A(\sigma)]^{-1} b_h(\vec{I}) + \vec{d}. \quad (11)$$

Тогда

$$\vec{J}(\sigma) = \frac{\partial \vec{U}(\sigma)}{\partial \sigma} = B \frac{\partial [A(\sigma)]^{-1}}{\partial \sigma} b_h(\vec{I}) = B \frac{\partial [A(\sigma)]^{-1}}{\partial \sigma} A(\sigma)v_h = -B \frac{\partial A(\sigma)}{\partial \sigma} [A(\sigma)]^{-1} v_h. \quad (12)$$

То есть в (12) производные от коэффициентов матрицы $A(\sigma)$ могут быть вычислены аналитически, а вторые производные и производные более высокого порядка будут равны нулю, что позволяет говорить о точной линеаризации $\vec{U}^\mu(\sigma) = \vec{U}^\mu(\sigma^0) + \vec{J}^\mu(\sigma^0)(\sigma - \sigma^0)$, $\mu = 1, \dots, M$.

Результаты решения обратной задачи по лабораторным данным КИТ

В этом разделе приводится реализация рассмотренного выше итеративно регуляризованного метода Гаусса – Ньютона с экспериментальными данными, которые были получены в университете Восточной Финляндии (Куопио) с использованием измерительной системы КИТ [6] с $L = 16$ электродами. Для проведения измерений ЭИТ было использовано в общей сложности 79 парных токовых конфигураций. Они были разделены на пять наборов [6]:

Набор 1: Смежные токовые конфигурации. Инъекции с помощью электродов 1–2, 2–3, ..., 15–16, 16–1.

Набор 2: Пропуск одного электрода. Инъекции с помощью электродов 1–3, 2–4, ..., 14–16, 15–1, 16–2.

Набор 3: Пропуск двух электродов. Инъекции с помощью электродов 1–4, 2–5, ..., 13–16, 14–1, ..., 16–3.

Набор 4: Пропуск трех электродов. Инъекции с помощью электродов 1–5, 2–6, ..., 12–16, 13–1, ..., 16–4.

Набор 5: Все против одного. Инъекции с помощью электрода №1 и каждым из остальных l , где $l = 2, \dots, 16$.

В каждой токовой конфигурации один электрод использовался для подачи тока, а другой – в качестве заземления. Амплитуда тока составляла 2 мА, т. е. действующее значение тока будет 1,41 мА. В соответствии с каждой инъекцией тока измерялись напряжения между всеми соседними электродами: 1–2, 2–3, ..., 15–16, 16–1, что в итоге дало $79 \cdot 16 = 1264$ измерений.

Резервуар измерительной системы был наполнен водопроводной водой, и внутри него размещались цилиндрические предметы различных форм и материалов, таких как сталь и пластик. В данной работе рассматривалось несколько случаев [6]: случай 1 (Case1_0 [6]) – резервуар, заполненный исключительно водой; случай 2 (Case1_1 [6]) – в резервуар добавлялся один цилиндр из пластика; случай 3 (Case1_2 [6]) – добавлялся один полый стальной цилиндр; случай 4 (Case4_3 [6]) – один пластиковый цилиндр и один полый стальной цилиндр; случай 5 (Case3_4 [6]) – с тремя полыми стальными цилиндрами различных размеров.

Для решения обратной задачи необходимо знать значение коэффициента электрической проводимости воды σ_0 и значения сопротивлений электродов $\{z_i\}$. Для определения этих данных использовались измерения электродных напряжений для случая 1, когда резервуар заполнен только водой. Специально разработанная итерационная процедура для определения σ_0 и $\{z_i\}$ позволила с высокой точностью установить их значения: $\sigma_0 = 0,001295 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ и $\{z_i\} = \{2.68\text{e-}4, 3.04\text{e-}4, 2.79\text{e-}4, 4.35\text{e-}4, 3.56\text{e-}4, 4.39\text{e-}4, 3.91\text{e-}4, 2.37\text{e-}4, 2.03\text{e-}4, 2.23\text{e-}4, 2.05\text{e-}4, 1.44\text{e-}4, 3.01\text{e-}4, 2.81\text{e-}4, 2.94\text{e-}4, 3.45\text{e-}4\}$ Ом на подробной треугольной сетке, состоящей из 5 854 треугольных элементов. Следует отметить, что полученные значения электрической проводимости и сопротивления электродов неплохо согласуются со значениями этих величин, представленных в работах [7; 8]: $\sigma_0 = 0,00141 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ и $\{z_i\} = \{2.64\text{e-}4, 3\text{e-}4, 2.76\text{e-}4, 4.27\text{e-}4, 3.5\text{e-}4, 4.30\text{e-}4, 3.91\text{e-}4, 2.35\text{e-}4, 2.01\text{e-}4, 2.21\text{e-}4, 2.04\text{e-}4, 1.43\text{e-}4, 2.98\text{e-}4, 2.78\text{e-}4, 2.92\text{e-}4, 3.4\text{e-}4\}$ Ом. Для количественной оценки точности полученных результатов были рассчитаны метрические оценки средней абсолютной ошибки (MAE = $3,736 \cdot 10^{-7}$) и среднеквадратичной ошибки (RMSE = $1,494 \cdot 10^{-6}$). Низкие значения MAE и RMSE свидетельствуют о высокой точности полученных данных. Эти значения демонстрируют хорошее соответствие модели экспериментальным данным.

При численной реконструкции распределения электрической проводимости для случаев 2–5 использовалась сетка, состоящая из 1 200 треугольных элементов (рис. 4, а). В качестве начального приближения в итеративно регуляризованном методе Гаусса – Ньютона использовалось значение фоновой проводимости σ_0 . Для параметра регуляризации стартовое значение α_0 выбиралось равным единице.

На рис. 6–9 представлены результаты сравнительного анализа реальных измерений и результатов численной реконструкции распределения электрической проводимости в исследуемых объектах. Левая колонка каждого рисунка демонстрирует фотографии реальных экспериментальных установок, на которых проводились измерения потенциала на электродах. Подробные значения измеренных напряжений можно найти в источнике [6]. Правая колонка иллюстрирует результаты вычислительной реконструкции, полученные с помощью итеративно регуляризованного метода Гаусса – Ньютона, подробно описанного в предыдущих разделах. Этот метод, как показано, эффективно решает обратную задачу ЭИТ, позволяя определить расположение и размеры неоднородностей в исследуемом объекте. При графической демонстрации полученных решений обратной задачи ЭИТ использовалась интерполяция значений электрической проводимости в узел сетки, являющийся центром барицентрической ячейки, в соответствии со значением площади.

Важно отметить, что метод успешно различает неоднородности с существенно различной электрической проводимостью по сравнению с фоновой средой. Например, метод точно определяет местоположение как диэлектрических включений (например, пластиковых элементов, где проводимость σ значительно меньше фоновой проводимости σ_0), так и высокопроводящих объектов (например, металлических колец, где $\sigma \gg \sigma_0$). Это демонстрирует высокую чувствительность метода к широкому диапазону изменений электрической проводимости. Разница в проводимости является ключевым фактором, влияющим на точность локализации неоднородности; чем больше разница между проводимостью неоднородности и окружающего материала, тем точнее определяется ее положение.

Однако, как уже упоминалось, метод Гаусса – Ньютона, несмотря на свою эффективность, демонстрирует определенное размытие границ неоднородностей на реконструированных изображениях, поэтому актуальным является проведение дальнейших исследований по оптимизации метода и возможного его улучшения [5; 7] с точки зрения уменьшения размытости границ неоднородностей.

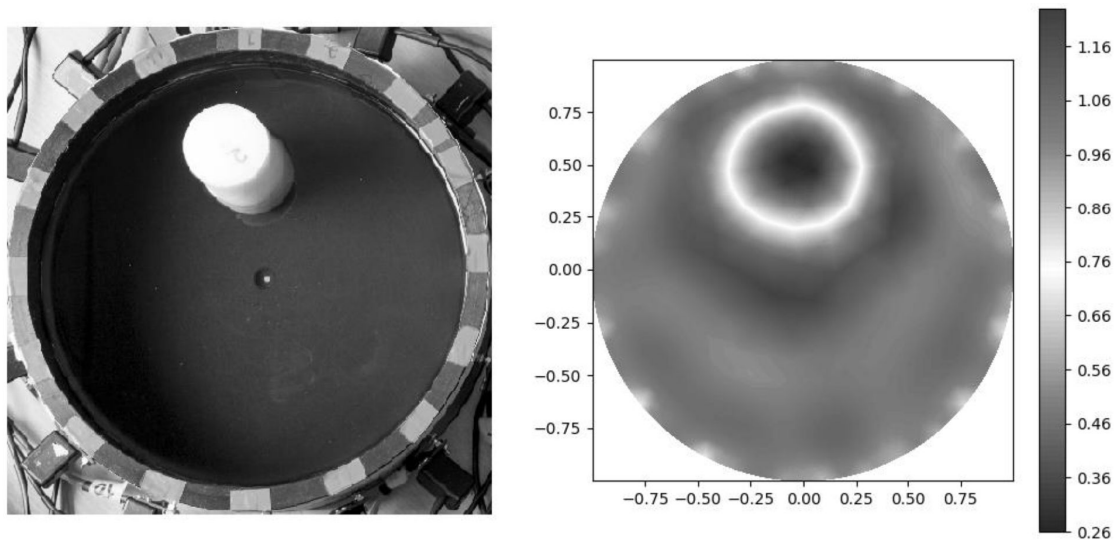


Рис. 6. Фотография условий проведения измерений и результат численной реконструкции для случая 2 (Case1_1 [6]) с пластиковым цилиндром. Справа шкала относительных значений σ/σ_0
Fig 6. A photograph of the measurement conditions and the result of numerical reconstruction for case 2 (Case 1_1 [6]) with a plastic cylinder. On the right is a scale of relative values σ/σ_0

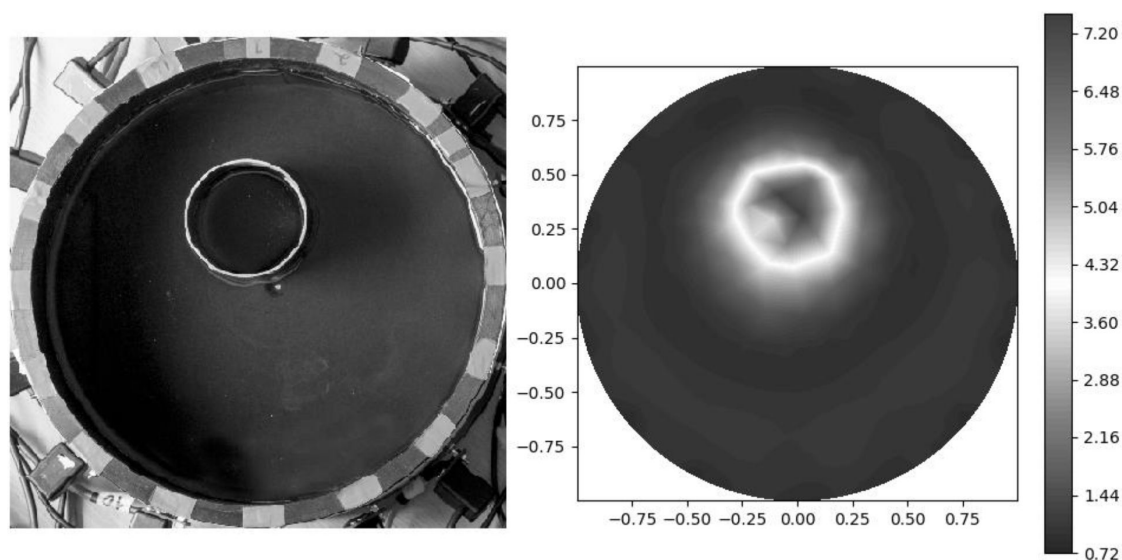


Рис. 7. Фотография условий проведения измерений и результат численной реконструкции для случая 3 (Case1_2 [6]) с полым металлическим цилиндром. Справа шкала относительных значений σ/σ_0
Fig. 7. A photograph of the measurement conditions and the result of numerical reconstruction for case 3 (Case 1_2 [6]) with a hollow metal cylinder. On the right is a scale of relative values σ/σ_0

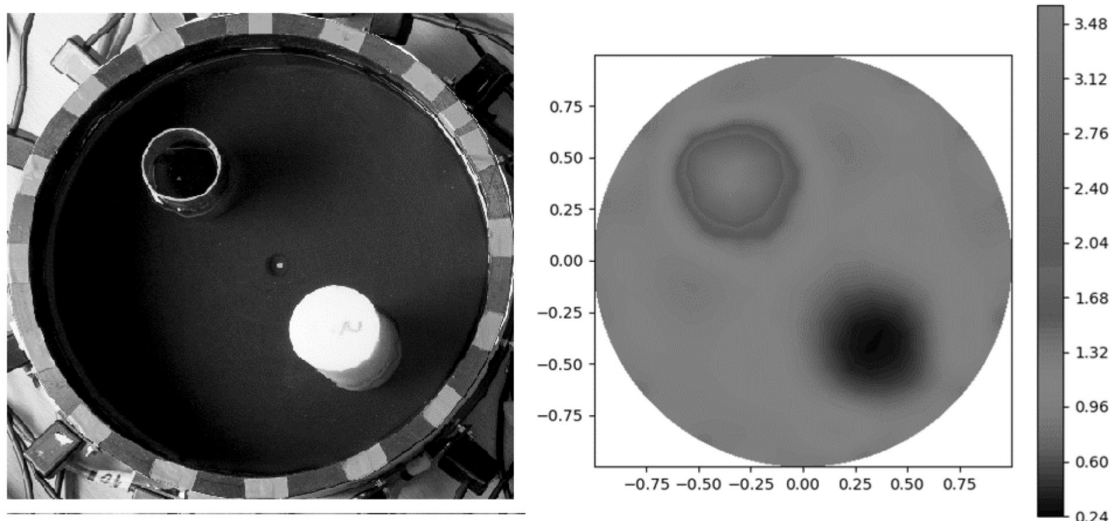


Рис. 8. Фотография условий проведения измерений и результат численной реконструкции для случая 4 (Case4_3 [6]) с пластиковым и полым стальным цилиндрами.

Справа шкала относительных значений σ/σ_0 .

Fig. 8. A photograph of the measurement conditions and the result of numerical reconstruction for Case 4 (Case 4_3 [6]) with plastic and hollow steel cylinders. On the right is a scale of relative values σ/σ_0 .

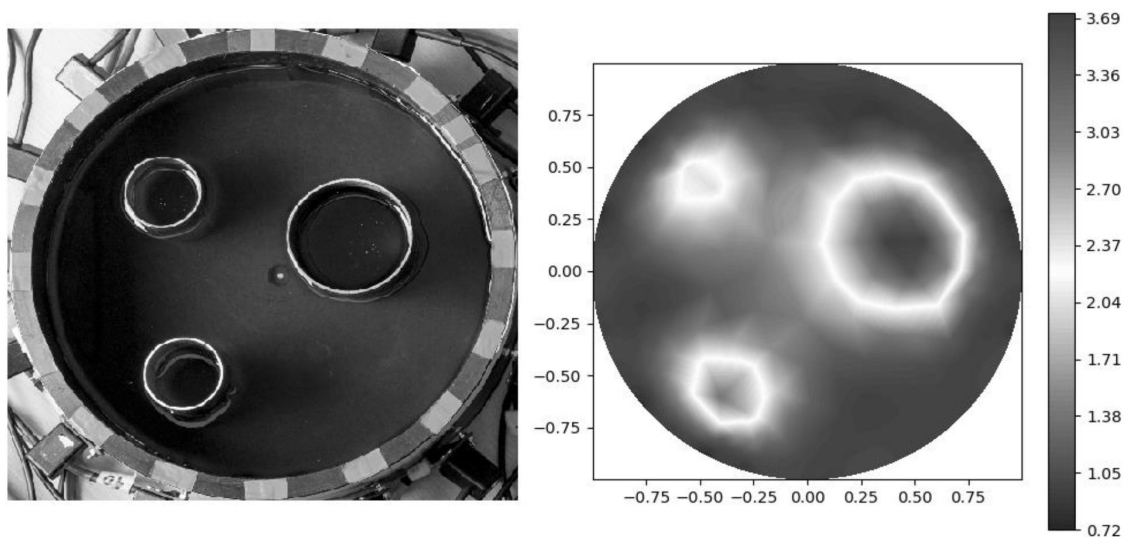


Рис. 9. Фотография условий проведения измерений и результат численной реконструкции для случая 5 (Case3_4 [6]) с тремя полыми стальными цилиндрами.

Справа шкала относительных значений σ/σ_0 .

Fig. 9. A photograph of the measurement conditions and the result of numerical reconstruction for case 5 (Case 3_4 [6]) with three hollow steel cylinders. On the right is a scale of relative values σ/σ_0 .

Заключение

Представлен итерационный численный метод решения обратной коэффициентной задачи для однородного эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами и интегро-дифференциальными граничными условиями в замкнутой области. Метод опирается на конечно-объемные аппроксимации дифференциальных и интегральных операторов на неструктурированных сетках, численное решение последовательности прямых задач при извест-

ном кусочно-постоянном распределении коэффициентов разностного эллиптического уравнения и сходящийся итеративно регуляризованный метод Гаусса – Ньютона. Разработанный метод решения обратных задач электроимпедансной томографии прошел тестирование на измерениях электрического напряжения, выполненных на экспериментальном стенде КИТ в университете Восточной Финляндии. Получены близкие к реальным результатам реконструкции электрической проводимости внутри области исследования.

Список литературы

1. **Barber D. C., Brown B. H.** Applied potential tomography // *J. Phys. E: Sci. Instrum.* 1984. Vol. 17. P. 723–733.
2. **Корженевский А. В.** Электроимпедансная томография: исследования, медицинские приложения, коммерциализация // *Альманах клинической медицины.* 2006. № 12.
3. **Пеккер Я. С., Бразовский К. С., Усов В. Ю. и др.** Электроимпедансная томография. Томск: НТЛ, 2004. 192 с.
4. **Wei Z, Liu D, Chen X.** Dominant-Current Deep Learning Scheme for Electrical Impedance Tomography // *IEEE Trans Biomed Eng.* 2019. Vol. 66(9). P. 2546–2555. DOI: 10.1109/TBME.2019.2891676. Epub 2019 Jan 9. PMID: 30629486.
5. **Wang J.** A two-step accelerated Landweber-type iteration regularization algorithm for sparse reconstruction of electrical impedance tomography // *Math Meth Appl Sci.* 2024, Vol. 47. P. 3261–3272.
6. **Hauptmann A., Kolehmainen V., Mach N. M., Savolainen T., Seppänen A., Siltanen S.** Open 2D electrical impedance tomography data archive. 2017. P. 1–15. <http://arxiv.org/abs/1704.01178>.
7. **Gehre M., Kluth T., Lipponen A., Jin B., Seppänen A., Kaipio J. P., Maass P.** Sparsity reconstruction in electrical impedance tomography: An experimental evaluation // *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2012, Vol. 236, Issue 8, P. 2126–2136. <https://DOI.org/10.1016/j.cam.2011.09.035>
8. **Gehre M., Jin B.** Expectation Propagation for Nonlinear Inverse Problems – with an Application to Electrical Impedance Tomography // *Numerical Analysis (math.NA)*. 2013. P. 1–35. DOI:10.1016/j.jcp.2013.12.010
9. **Borcea L.** Electrical impedance tomography, topical review // *Inverse Problems*. 2002. Vol. 18. R99–R136.
10. **Cheney M., Isaacson D., Newell J. C.** Electrical impedance tomography // *SIAM review*. 1999. Vol. 41 (1). P. 85–101.
11. **Somersalo E., Cheney M., Isaacson D.** Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1992. Vol. 52(4). 1023–1040.
12. **Gu D., Liu D., Smyl D., Deng J., Du J.** Supershape recovery from electrical impedance tomography data // *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. 2021. Vol. 70. P. 1–11.
13. **Афанасьева А. А., Старченко А. В.** Численное решение прямой задачи электроимпедансной томографии в полной электродной постановке // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.* 2022. № 78. С. 5–21; DOI: 10.17223/19988621/78/1
14. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
15. **Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.** Численные методы: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. вузов, 8-е изд. М.: Физматлит, 2000. 624 с.
16. **Саад Ю.** Итерационные методы для разреженных линейных систем: учеб. пособие. В 2 т. 2-е изд. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013. Т. 1. 344 с.

17. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач: учеб. пособие для вузов по спец. «Прикл. Математика», 3-е изд., испр. М.: Наука, 1986. 286 с.
18. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
19. **Кабанихин С. И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009.
20. **Бакушинский А. Б.** К проблеме сходимости интеративно регуляризованного метода Гаусса – Ньютона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32, № 9. С. 1503–1509.
21. **Li J., Yuan Y.** Numerical simulation and analysis of generalized difference method on triangular networks for electrical impedance tomography // Appl. Math. Model. 2009. Vol. 3. No. 5. P. 2175–2186; DOI: 10.1016/j.apm.2008.05.025

References

1. **Barber D. C., Brown B. H.** Applied potential tomography. *J. Phys. E: Sci. Instrum.* 1984, vol. 17, pp. 723–733.
2. **Korzhenevsky A. V.** Elektroimpedansnaya tomografiya: issledovaniya, medicinskie prilozheniya, kommercializaciya [Electrical impedance tomography: research, medical applications, commercialization]. *Almanac of Clinical Medicine.* 2006, no. 12. (In Russ.)
3. **Pekker Ya. S., Brazovsky K. S., Usov V. Yu. et al.** Elektroimpedansnaya tomografiya [Electrical impedance tomography]. Publisher: Tomsk: NTL, 2004. 192 с. (In Russ.)
4. **Wei Z, Liu D, Chen X.** Dominant-Current Deep Learning Scheme for Electrical Impedance Tomography. *IEEE Trans Biomed Eng.* 2019 Sep;66(9):2546–2555. DOI: 10.1109/TBME.2019.2891676. Epub 2019 Jan 9. PMID: 30629486.
5. **Wang J.** A two-step accelerated Landweber-type iteration regularization algorithm for sparse reconstruction of electrical impedance tomography. *Math Meth Appl Sci.* 2024, vol. 47, pp. 3261–3272.
6. **Hauptmann A., Kolehmainen V., Mach N. M., Savolainen T., Seppänen A., Siltanen S.** Open 2D electrical impedance tomography data archive, 2017, pp. 1–15. <http://arxiv.org/abs/1704.01178>.
7. **Gehre M., Kluth T., Lipponen A., Jin B., Seppänen A., Kaipio J. P., Maass P.** Sparsity reconstruction in electrical impedance tomography: An experimental evaluation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2012, vol. 236, iss. 8, pp. 2126–2136. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2011.09.035>
8. **Gehre M., Jin B.** Expectation Propagation for Nonlinear Inverse Problems – with an Application to Electrical Impedance Tomography. *Numerical Analysis (math. NA).* 2013, pp. 1–35. DOI: 10.1016/j.jcp.2013.12.010
9. **Borcea L.** Electrical impedance tomography, topical review. *Inverse Problems.* 2002, vol. 18, pp. R99–R136.
10. **Cheney M., Isaacson D., Newell J. C.** Electrical impedance tomography, *SIAM review*, 1999, 41(1), pp. 85–101.
11. **Somersalo E., Cheney M., Isaacson D.** Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1992, 52(4), pp. 1023–1040.
12. **Gu D., Liu D., Smyl D., Deng J., Du J.** Supershape recovery from electrical impedance tomography data. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2021, 70, pp. 1–11.
13. **Afanaseva A. A., Starchenko A. V.** Chislennoe reshenie pryamoj zadachi elektroimpedansnoj tomografii v polnoj elektrodnoj postanovke [Numerical solution of the direct problem of electrical

- impedance tomography in the full electrode formulation]. *Vestn. Tomsk. state University. Mat. and Mech.* 2022, no. 78, pp. 5–21. DOI: 10.17223/19988621/78/1 (In Russ.)
14. **Tikhonov A. N., Samarsky A. A.** Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of Mathematical Physics]. Moscow: Nauka, 1977. 735 c. (In Russ.)
 15. **Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M.** Chislennye metody: uchebnoe posobie dlya studentov fiziko-matematicheskikh special'nostej vuzov [Numerical methods: a textbook for students of physics and mathematics specialties of higher education institutions]. 8th ed. Moscow [et al.]: Fizmatlit [et al.], 2000. 624 c. (In Russ.)
 16. **Saad Yu.** Iteracionnye metody dlya razrezhennykh linejnykh sistem [Iterative methods for sparse linear systems]. In 2 volumes, vol. 1. Study guide, vol. 1, 2nd ed. // M.: Publishing house of Moscow University. 2013. 344 c. (In Russ.)
 17. **Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya.** Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for solving ill-posed problems]: [Textbook for universities in the specialty "Applied Mathematics"]. 3rd ed., corrected. Moscow: Nauka, 1986. 286 c. (In Russ.)
 18. **Lavrentiev M. M., Romanov V. G., Shishatsky S. P.** Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza [Ill-posed problems of mathematical physics and analysis]. Moscow: Nauka, 1980. 286 c. (In Russ.)
 19. **Kabanikhin S. I.** Obratnye i nekorrektnye zadachi [Inverse and ill-posed problems]. Novosibirsk: Siberian scientific publishing house, 2009. (In Russ.)
 20. **Bakushinsky A. B.** K probleme skhodimosti iterativno-regulyarizovannogo metoda Gaussa-N'yutona [On the problem of convergence of the iteratively regularized Gauss-Newton method]. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1992, vol. 32, no. 9, pp. 1503–1509. (In Russ.)
 21. **Li J., Yuan Y.** Numerical simulation and analysis of generalized difference method on triangular networks for electrical impedance tomography. *Appl. Math. Model.* 2009, vol. 3, no. 5, pp. 2175–2186. DOI: 10.1016/j.apm.2008.05.025

Сведения об авторах

Афанасьева Анна Александровна, аспирант кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского государственного университета

Старченко Александр Васильевич, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского государственного университета, научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета
Researcher ID B-2354-2014

Information about the Authors

Anna A. Afanaseva, Graduate Student of Department of Computational Mathematics and Computer Modelling of National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation.

Alexander V. Starchenko, Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Computational Mathematics and Computer Modelling of National Research Tomsk State University, Scientific Researcher, Regional Scientific Educational Mathematical Center of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation
Researcher ID B-2354-2014

*Статья поступила в редакцию 13.02.2025;
одобрена после рецензирования 17.08.2025; принята к публикации 17.08.2025*

*The article was submitted 13.02.2025;
approved after reviewing 17.08.2025; accepted for publication 17.08.2025*