Научная статья

УДК 004.827
DOI 10.25205/1818-7900-2024-22-2-5-19

Алгоритмы проверки корректности интервальных экспертных оценок

**Надежда Андреевна Дымонт[1], Елена Дмитриевна Малаева[2]
Гульнара Эркиновна Яхъяева[3]**

Новосибирский государственный университет
Новосибирск, Россия

[1]n.dymont@g.nsu.ru
2e.malaeva@g.nsu.ru
[3]g.iakhiaeva@g.nsu.ru

Аннотация

Экспертная вероятность используется для принятия решений, позволяет оценить риски, особенно полезна в условиях ограниченности и недоступности получения объективных данных. При этом возможны противоречия между оценками, что может затруднить анализ и принятие решений.

В статье описан алгоритм, который проверяет соответствие экспертных оценок с использованием вероятностных интервалов. Один из разделов посвящен разработке метода оценки новой формулы, основанной на исходной системе оценок. Описан пользовательский интерфейс, обеспечивающий взаимодействие с разработанными алгоритмами.

Ключевые слова

экспертные оценки, субъективная вероятность, согласованное означивание, нечеткая модель

Для цитирования

Дымонт Н. А., Малаева Е. Д., Яхъяева Г. Э. Алгоритмы проверки корректности интервальных экспертных оценок // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2024. Т. 22, № 2. С. 5–19. DOI 10.25205/1818-7900-2024-22-2-5-19

Algorithms for Verifying the Correctness of Interval Expert Evaluations

Nadezhda A. Dymont[1], Elena D. Malaeva[2], Gulnara E. Yakhyaeva[3]

Novosibirsk State University,
Novosibirsk, Russia

[1]n.dymont@g.nsu.ru
[2]e.malaeva@g.nsu.ru
[3]g.iakhiaeva@g.nsu.ru

Abstract

Expert probability is used for decision-making, allows you to assess risks, and is especially useful in conditions of limited and inaccessible objective data. At the same time, there may be contradictions between the estimates, which may complicate analysis and decision-making. This paper describes an algorithm that checks the compliance of expert estimates using probability intervals. One of the sections is devoted to the development of an evaluation method for a new formula based on the original evaluation system. The article describes the user interface that provides interaction with the developed algorithms.

Keywords

expert evaluations, subjective probability, coordinated evaluations, fuzzy model

For citation

Dymont N. A., Malaeva E. D., Yakhyaeva G. E. Algorithms for verifying the correctness of interval expert evaluations. *Vestnik NSU. Series: Information Technologies*, 2024, vol. 22, no. 2, pp. 5–19 (in Russ.) DOI 10.25205/1818-7900-2024-22-2-5-19

Введение

В наше время субъективная вероятность играет важную роль в принятии решений в различных областях, от финансового анализа до управления проектами. Этот подход позволяет оценивать риски, успешность завершения проектов и предвидеть возможные сценарии, особенно когда объективные данные недоступны или их неполнота делает использование объективных оценок нецелесообразным из-за высоких затрат на их получение.

Концепция субъективной вероятности, впервые введенная Фрэнком Рамсеем, базируется на уверенности эксперта в наступлении конкретного события [1]. Этот подход выражает личное мнение и может быть основан на опыте, интуиции или знаниях специалиста в определенной области. Однако важно учитывать, что субъективная вероятность также может быть подвержена влиянию различных факторов, таких как эмоции или предвзятость.

Чтобы создать более надежную модель, часто привлекают мнение нескольких экспертов [2]. При этом возможны противоречия между их оценками, что может затруднить анализ и принятие решений. Для обеспечения согласованности экспертных знаний используются различные инструменты, включая методы агрегирования мнений и анализ согласованности предсказаний. Одним из способов проверки согласованности является проведение экспертных сессий, где участники могут обсудить свои оценки и аргументировать точки зрения [3]. Правильное применение методов оценки согласованности может значительно повысить эффективность принятия решений в условиях неопределенности, обеспечивая более точные прогнозы и уменьшая риски.

Настоящее исследование базируется на алгоритме проверки корректности оценочных знаний, описанном в работе [4], где была предложена теоретико-модальная формализация субъективной и объективной интерпретаций вероятности. Также в контексте данной темы ранее было проведено исследование [5, 6], которое сосредоточилось на визуализации исходных данных в виде дерева и проверки согласованности высказываний с его помощью. В процессе исполнения программы строится дерево, в котором конъюнкты из СДНФ-формул на входе являются его листьями. При помощи дизъюнкции между собой они объединяются в исходные формулы, при этом в корне дерева возникает особенная вершина – дизъюнкция всех конъюнкций с вероятностью 1. Ребра в этой структуре являются отношением частичного порядка между вершинами дерева. У каждой вершины есть свое оценочное значение, и стоит отметить, что конъюнктам из СДНФ-формул по умолчанию присваивается значение в виде интервала [0;1]. Далее эти значения могут корректироваться в зависимости от введенных пользователем значений, что приводит к последующему сужению интервала.

Подобный подход не позволяет расширять знания о предметной области, лишь проверять их согласованность. Но также важно уметь оценивать и новые высказывания в имеющемся контексте, исследуя его новые стороны и углубляя свое понимание. Прогнозирование играет ключевую роль в развитии научного и практического прогресса во многих областях. Новые высказывания могут предложить и новые способы интерпретации данных или решения проблем, которые ранее были недоступны. Их оценка позволяет расширить возможности в области принятия решений и анализа данных, она способствует развитию науки и углублению понимания проблем и явлений в различных областях знаний.

Одной из причин, почему эксперты могут испытывать затруднения в оценке новых формул, является их сложность и техническая специфика [7]. Новые подходы могут основываться на совершенно иных принципах или использовать новые технологии, с которыми эксперты могут быть не знакомы. Это может приводить к тому, что эксперты не имеют достаточного опыта или знаний для адекватной оценки. Важно также отметить, что даже если эксперт имеет достаточные знания в предметной области, он может столкнуться с трудностями в оценке новых формул из-за их абстрактности. Некоторые новые подходы могут быть труднопонимаемыми или требовать специальных знаний в области математики, статистики или информатики, что делает их оценку непростой задачей.

В существующих решениях также невозможна оценка события несколькими значениями, что представляет собой значительное ограничение. В большинстве случаев системы оценки предполагают использование одного численного значения вероятности для каждого события. Однако в реальной жизни разные эксперты могут иметь разные оценки вероятности для одного и того же события, основываясь на своем опыте, знаниях и восприятии. Когда такие различия все же возникают, системы, в которых одно и то же выражение имеет несколько несовпадающих вероятностных оценок, являются заведомо несовместными. Это создает серьезные препятствия для принятия эффективных решений и планирования на основе таких данных.

Одним из возможных способов преодоления этой проблемы является принятие вероятности события за интервал, который включает все оценки, полученные от различных экспертов. Такой подход позволяет учесть разнообразие мнений и взглядов и обеспечить более полное представление о вероятности наступления события. После того как вероятность события представлена интервалом, применяются методы интервального анализа для проверки согласованности системы высказываний. Такая проверка позволяет выявить возможные противоречия в оценках и принять решения на основе наиболее достоверных данных.

В данной статье представлен процесс разработки алгоритма, который направлен на проверку согласованности экспертных оценок с использованием вероятностных интервалов. В контексте исследования особое внимание уделяется разработке метода оценки новой формулы, основанной на изначальной системе оценок. Для обеспечения удобства взаимодействия с разработанными алгоритмами представлен пользовательский интерфейс. Этот интерфейс предоставляет пользователям интуитивно понятные инструменты для ввода экспертных оценок, проведения проверки согласованности оценок и анализа результатов. В заключении статьи сформулированы основные выводы и результаты работы. В целом, статья подчеркивает важность разработки и применения подобных инструментов в контексте принятия решений и анализа данных в условиях неопределенности.

1. Математические основы

При анализе сложных систем в условиях неопределенности часто применяются методы теории вероятности и математической статистики. Эти методы основаны на вероятностной интерпретации данных и выводов. Сегодня возрастает потребность в новых подходах к математическому описанию информации с высоким уровнем неопределенности. В данной работе используется теоретико-модельная формализация субъективной вероятности через аппарат нечетких моделей, описанная в работах [8–10].

Определение 1. Тройку $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma, \mu \rangle$ будем называть **нечеткой моделью**, если истинностная функция $\mu : S(\sigma_A) \to [0,1]$ является нечеткой мерой, определенной на алгебре Линденбаума – Тарского $S(\sigma_A)/\sim$, на которой выполняются следующие условия.

(A1) Если предложение $\varphi \in S(\sigma_A)$ тождественно истинно (тождественно ложно), то $\mu(\varphi) = 1 \left(\mu(\varphi) = 0\right)$.

(A2) Для любой счетной последовательности предложений $\{\varphi_i \in S(\sigma_A) \mid i \in \mathbb{N}\}$ такой, что $\mu(\varphi_i \,\&\, \varphi_j) = 0$ для любых $i, j \in \mathbb{N},$, выполняется условие

$$\mu\left(\bigvee_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(\varphi_i).$$

(A3) Для любых предложений $\varphi, \psi \in S(\sigma_A)$ выполняется условие

$$\varphi\psi \;\Rightarrow\; \mu(\varphi) = \mu(\psi).$$

(A4) Для любой формулы $\varphi(x) \in F(\sigma)$ с одной свободной переменной выполняются условия

$$\mu\left(\forall x \varphi(x)\right) = \mu\left(\bigwedge_{a \in A} \varphi(a)\right),\; \mu\left(\exists x \varphi(x)\right) = \mu\left(\bigvee_{a \in A} \varphi(a)\right).$$

Задавая нечеткую модель $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma, \mu \rangle$ как формализацию предметной области, мы должны располагать знанием об истинностных значениях на модели $\mathfrak{A}_\mu$ всех бескванторных формул сигнатуры . Однако эксперт (или даже группа экспертов) может не обладать таким полным знанием. Следовательно, на практике мы можем столкнуться с частичным означиванием предложений сигнатуры σ. Более того, разные эксперты могут немного расходиться в своих оценках того или иного события, и, как следствие, мы будем вынуждены вместо точечных оценок рассматривать интервальные оценки.

Обозначим через $\mathbb{I}$ множество всех замкнутых подъинтервалов интервала [0; 1], т. е.

$$\mathbb{I} = \left\{[a;b] \mid 0 \le a \le b \le 1\right\}.$$

Также будем считать, что $\varnothing \in \mathbb{I}.$. Это нам позволит формализовать частичные (неполные) знания о предметной области.

Определение 2. Отображение $ev: S(\sigma_A) \to \mathbb{I} \cdot \iota$ назовем **интервальным означиванием** множества предложений сигнатуры σ_A.

Означивание *ev* назовем **полным**, если для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем $ev(\varphi) \ne \varnothing.$ В противном случае означивание *ev* будем называть **частичным**.

Означивание *ev* назовем **точечным**, если для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ либо $ev(\varphi) = \varnothing$, либо $ev(\varphi)$ является вырожденным интервалом, т. е. числом из интервала [0; 1].

Определение 3. Интервальное означивание $ev: S(\sigma_A) \to \mathbb{I}$ **согласуется** с нечеткой моделью $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma, \mu \rangle$, если для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ выполняется условие:

$$ev(\varphi) \ne \varnothing \Rightarrow\; \mu(\varphi) \in ev(\varphi).$$

Означивание называется **согласованным**, если существует хотя бы одна нечеткая модель, с которой оно согласуется.

Очевидно, что истинностная функция нечеткой модели $\mathfrak{A}_\mu$ является согласованным, полным, точечным означиванием.

Далее встает вопрос о проверке, является ли данное означивание согласованным или нет. В статье [11] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $ev : S(\sigma_A) \to \mathbb{I}$ точечное частичное означивание такое, что множество $S = \{\varphi \mid ev(\varphi) \neq \varnothing\}$ является конечным множеством бескванторных предложений. Означивание является согласованным тогда и только тогда, когда система линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{ij}\omega_j = ev(\varphi_i), \quad i = 1, \ldots n; \\ \sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1, \end{cases} \tag{1.1}$$

совместна и имеет решение при ограничениях $\omega_j \in [0;1]\,(j = 1,\ldots,m)$.

Поясним обозначения из теоремы 1. Пусть $S = \{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ – конечное множество бескванторных предложений. Тогда система (1.1) будет содержать n + 1 уравнение. Также в системе (1.1) через ω_j обозначается полный конъюнкт сигнатуры σ_A, а сумма $\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{ij}\omega_j$ является разложением предложения φ_i в дизъюнкцию полных конъюнктов.

Данная теорема будет нами использоваться в параграфе 2.1 для описания алгоритма проверки согласованности интервального частичного означивания.

Определение 4. Означивание $ev_1 : S(\sigma_A) \to \mathbb{I}$ является **расширением** интервального означивания $ev_2 : S(\sigma_A) \to \mathbb{I}$, если для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ выполняется условие:

$$ev_2(\varphi) \subseteq ev_1(\varphi).$$

Означивание ev_2 в этом случае будем называть **сужением** означивания ev_1.

Очевидно, что если ev – полное согласованное означивание, тогда любое его расширение также согласованное. Однако если является частичным согласованным означиванием, то не всякое его расширение будет согласованным.

Определение 5. Пусть $ev : S(\sigma_A) \to \mathbb{I}$ – согласованное означивание. Отображение $ken_{ev} : S(\sigma_A) \to \wp([0;1])$ будем называть **ядром** означивания ev, если для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ выполняется условие:

$$ken_{ev}(\varphi) = \{\mu(\varphi) | \text{модель } \mathfrak{A}_\mu \text{ согласована с означиванием } ev\}.$$

Теорема 2. Ядро любого согласованного означивания является полным согласованным означиванием.

Доказательство. Рассмотрим согласованное означивание $ev : S(\sigma_A) \to \mathbb{I}$ и его ядро $ken_{ev} : S(\sigma_A) \to \wp([0;1])$. Пусть нечеткие модели $\mathfrak{A}_{\mu_1} = \langle A, \sigma, \mu_1 \rangle$ и $\mathfrak{A}_{\mu_2} = \langle A, \sigma, \mu_2 \rangle$ согласуются с означиванием ev. Тогда для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ имеем

$$\mu_1(\varphi),\ \mu_2(\varphi) \in ken_{ev}(\varphi).$$

Допустим, что $\mu_1(\varphi) < \mu_2(\varphi)$. Нам необходимо показать, что для любого числа α такого, что $\mu_1(\varphi) < \alpha < \mu_2(\varphi)$, можно построить нечеткую модель $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma, \mu \rangle$, которая, с одной стороны, согласована с означиванием ev, а с другой стороны, $\mu(\varphi) = \alpha$.

Пусть

$$k_1 = \frac{\alpha - \mu_1(\varphi)}{\mu_2(\varphi) - \mu_1(\varphi)} \text{ и } k_2 = \frac{\mu_2(\varphi) - \alpha}{\mu_2(\varphi) - \mu_1(\varphi)}.$$

Определим отображение

$$\mu = k_2 \cdot \mu_1 + k_2 \cdot \mu_2 .$$

Очевидно, что отображение μ является нечеткой мерой, отвечающей всем свойствам из определения 1. Следовательно, оно является истинностной функцией нечеткой модели $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma, \mu \rangle$. Более того, $\mu(\varphi) = \alpha$.

Покажем, что построенная таким образом, нечеткая модель $\mathfrak{A}_\mu$ согласуется с означиванием ev.

Случай, когда $ev(\varphi) = \varnothing$ тривиален. Поэтому рассмотрим случай, когда $ev(\varphi) \neq \varnothing$.

Так как модели $\mathfrak{A}_{\mu_1}$ и $\mathfrak{A}_{\mu_2}$ согласуются с означиванием ev, то $\left[\mu_1(\varphi), \mu_2(\varphi)\right] \subseteq ev(\varphi)$. А так как $\mu_1(\varphi) < \alpha < \mu_2(\varphi)$, то $\alpha \in ev(\varphi)$. Следовательно, модель $\mathfrak{A}_\mu$ также согласуется с означиванием ev.

Теорема доказана.

Данная теорема будет нами использоваться в параграфе 2.2 для описания алгоритма предсказания оценки для новой формулы на основе уже имеющихся оценок. Математическая формулировка данного алгоритма следующая: на входе у нас имеется интервальное частичное означивание $ev : S(\sigma_A) \to \mathbb{I}$ и предложение $\varphi \in S(\sigma_A)$ такое, что $ev(\varphi) = \varnothing$. Требуется найти интервал $ken_{ev}(\varphi)$.

2. Архитектура программной системы

Для выявления противоречий в оценках, адаптации к новой информации и принятия информированных решений в условиях неопределенности была разработана программная система, которая состоит из двух модулей.

1. **Модуль проверки совместности экспертных оценок** предоставляет возможность проверить согласованность множества экспертных оценок относительно событий. Он создает систему уравнений для определения наличия проблем с согласованностью.

2. **Модуль предсказания оценки для новой формулы** на основе уже имеющихся оценок, чтобы не нарушить согласованность исходной системы.

Рассмотрим основные принципы функционирования каждого из указанных модулей.

2.1. Модуль проверки совместности экспертных оценок

Как было сказано выше, интервальная неопределенность означает, что мы имеем лишь общее представление о значении интересующей нас величины, указывая только диапазон возможных значений или пределы ее изменения. Таким образом, ширина этого интервала является мерой нашей неопределенности или неоднозначности в отношении этой величины.

Для проверки согласованности интервальных экспертных оценок мы будем использовать технику интервального анализа [12]. В частности, будем использовать алгоритмы проверки разрешимости систем интервальных линейных уравнений.

Определение 6. Систему уравнений будем называть интервальной системой линейных уравнений (ИСЛУ), если она имеет вид

$$\left\{ \sum_{j=1}^{m} \overline{\boldsymbol{a}_{ij}} x_j = \overline{\boldsymbol{b}_i}, \quad i = 1, ..., n, \right. \tag{2.1}$$

где коэффициенты системы $\overline{a_{ij}}$ и свободные члены системы $\overline{b_i}$ являются интервалами действительных чисел.

Определение 7. ИСЛУ вида (2.1) будем называть **сильно разрешимой (слабо разрешимой)**, если для любых действительных чисел (найдутся действительные числа) $a_{ij} \in \overline{\boldsymbol{a}_{ij}}, b_i \in \overline{\boldsymbol{b}_i}$ таких, что следующая система уравнений совместна, т.е. имеет решение:

$$\left\{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, ..., n,\right.$$

Для проверки согласованности оценочных знаний мы будем проверять слабую разрешимость ИСЛУ

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{ij} x_j = [\alpha_i; \beta_i], \quad i = 1, ..., n, \\ \sum_{j=1}^{m} x_j = 1, \end{cases} \tag{2.2}$$

где коэффициенты $\varepsilon_{ij} \in \{0; 1\}$, т. е. являются вырожденными (точечными) интервалами, $[\alpha_i; \beta_i] \subseteq [0; 1]$. Параметр равен количеству формул, согласованность которых необходимо проверить.

Для построения ИСЛУ (2.2) (согласно теореме 1) нам необходимо привести все введенные формулы к совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ). Для этого выделяются все отдельные атомарные высказывания из заданного набора формул и упорядочиваются в лексикографическом порядке.

Коэффициент ε_{ij} равен 1, если конъюнкт под номером j содержится в полном СДНФ-представлении предложения под номером i, и 0 в противном случае. Интервал $[\alpha_i, \beta_i]$ является оценочным значением i-го предложения.

Совместность системы проверяется методом максимизации распознающего функционала [13], реализованном в библиотеке intvalpy. Исследование разрешимости интервальной линейной системы уравнений проводится путем решения задачи безусловной максимизации распознающего функционала $Uss(x, A, b)$. При максимизации $U = \max_{x \in \mathbb{R}^n} Uss(x, A, b)$, если $U \geq 0$, то точка максимума τ принадлежит множеству решений $\Xi(A, b)$ системы $Ax = b$, указывая на ее разрешимость; если $U > 0$, то принадлежит внутренности множества решений, и разрешимость системы остается устойчивой к небольшим изменениям в A и b; если же $U < 0$, то множество решений пусто, что указывает на неразрешимость системы $Ax = b$.

Рассмотрим работу алгоритма на примере. Проверим согласованность формул φ_1, φ_2, φ_3 с соответствующими интервальными оценками (табл. 1).

Таблица 1

Входные данные для проверки совместности оценок

Table 1

Input data for checking the consistency of estimates

Формула	Оценка
$\varphi_1 = (P(a) \wedge Q(b)) \vee \overline{R(c)}$	[0,7; 0,8]
$\varphi_2 = R(c) \wedge \overline{Q(b)}$	[0,2; 0,3]
$\varphi_3 = \overline{P(a)} \vee Q(b)$	[0,8; 0,9]

Приведем введенные формулы к виду СДНФ:

$$\varphi_1 = \left(\overline{P(a)} \wedge \overline{Q(b)} \wedge \overline{R(c)}\right) \vee \left(\overline{P(a)} \wedge Q(b) \wedge \overline{R(c)}\right) \vee \left(P(a) \wedge \overline{Q(b)} \wedge \overline{R(c)}\right) \vee$$

$$\vee\left(P(a)\wedge Q(b)\wedge\overline{R(c)}\right)\vee\left(P(a)\wedge Q(b)\wedge R(c)\right)$$

$$\varphi_2=\left(\overline{P(a)}\wedge\overline{Q(b)}\wedge R(c)\right)\vee\left(P(a)\wedge\overline{Q(b)}\wedge R(c)\right)$$

$$\varphi_3=\left(\overline{P(a)}\wedge\overline{Q(b)}\wedge\overline{R(c)}\right)\vee\left(\overline{P(a)}\wedge\overline{Q(b)}\wedge R(c)\right)\vee\left(\overline{P(a)}\wedge Q(b)\wedge\overline{R(c)}\right)$$

$$\vee\left(\overline{P(a)}\wedge Q(b)\wedge R(c)\right)\vee\left(P(a)\wedge\overline{Q(b)}\wedge\overline{R(c)}\right)\vee\left(P(a)\wedge\overline{Q(b)}\wedge R(c)\right)$$

Этим данным соответствует следующая система линейных интервальных уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_3+x_5+x_7+x_8=[0,7;0,8] \\ x_2+x_6=[0,2;0,3] \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=[0,8;0,9] \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=1 \\ x_1\in[0,1],\quad i=1,\dots,8 \end{cases}$$

Эта система является совместной, а значит и входные данные непротиворечивы.

2.2. Модуль предсказания оценки для новой формулы на основе уже имеющихся оценок

Экспертная оценка в предметной области может быть ограничена огромным разнообразием факторов, воздействующих на конкретные события. Из-за этой сложности и объема информации эксперты могут оценивать только ограниченное число возможных событий. Разработанный нами алгоритм предсказания оценки для новой формулы на основе уже имеющихся оценок становится ключевым инструментом в этом контексте. Он позволяет адаптироваться к новой информации, предоставляя метод оценки новых событий на основе имеющихся экспертных оценок и данных. Такой инструмент позволяет компенсировать ограничения в экспертных оценках и обеспечивает более полное представление о возможных сценариях развития событий. В конечном итоге это способствует более обоснованным и информированным решениям в условиях неопределенности и комплексности предметных областей.

Опишем этот алгоритм. Пусть у нас есть слабо разрешимая ИСЛУ вида (2.2), описывающая уже имеющиеся знания о предметной области. Исходя из этих знаний, требуется получить максимальную согласованную оценку некоторого нового предложения ψ данной сигнатуры.

Под максимальной согласованной оценкой мы будем понимать такое множество значений $A \subseteq [0;1]$, что любое его надмножество (т. е. $A \subset B \subseteq [0;1]$) B уже является несогласованной оценкой. Согласно теореме 2, максимальная согласованная оценка предложения ψ будет представлять собой замкнутый интервал $[\alpha;\beta] \subseteq [0;1]$. Таким образом, целью нашего алгоритма является нахождение левой и правой границ максимального оценочного интервала.

Так как для определения точных границ оценочного интервала нам потребуется сделать счетное число шагов, то на практике будем искать эти границы некоторой заданной точностью Δ.

На **первом шаге** алгоритма мы приводим предложение к виду СДНФ и записываем его в виде многочлена

$$\sum_{j=1}^{m}\gamma_j x_j\ ,$$

где коэффициент γ_j равен 1, если конъюнкт под номером j содержится в СДНФ-представлении предложения ψ, и 0 в противном случае.

Зададим начальный диапазон поиска границ интервальных оценок: $[\underline{\alpha};\overline{\alpha}]$ для левой границы оценки и $[\underline{\beta};\overline{\beta}]$ для правой границы оценки. Очевидно, что как левая граница α, так и правая граница интервальной оценки предложения ψ лежат в интервале [0; 1]. Поэтому положим

$$\underline{\alpha}=\underline{\beta}=0 \text{ и } \underline{\alpha}=\underline{\beta}=1.$$

На следующих шагах алгоритма будет происходить пошаговое уточнение границ. Алгоритм будет завершаться, когда диапазон возможных значений границ (т. е. длина отрезков $[\underline{\alpha};\overline{\alpha}]$ и $[\underline{\beta};\overline{\beta}]$ будет меньше заданного параметра Δ.

Поиск левой границы оценки.

На **втором шаге** ИСЛУ (2.2) пополняется новым уравнением и принимает вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} \varepsilon_{ij} x_j = [\alpha_i;\beta_i], \quad i=1,\dots,n, \\ \sum\limits_{j=1}^{m} x_j = 1, \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_j x_j = \left[\underline{\alpha}; \dfrac{\underline{\alpha}+\overline{\alpha}}{2}\right]. \end{cases} \tag{2.3}$$

Далее проверяем, является ли система (2.3) слабо разрешимой.

На **третьем шаге** происходит сужение диапазона $\left[\underline{\alpha};\overline{\alpha}\right]$ левой границы оценки предложения ψ. Если система (2.3) является слабо разрешимой, то определяем новый диапазон:

$$\underline{\alpha} \leftrightharpoons \underline{\alpha} \text{ и } \overline{\alpha} \leftrightharpoons \frac{\underline{\alpha}+\overline{\alpha}}{2}.$$

Если же система (2.3) не является слабо разрешимой, то переопределяем диапазон левой границы следующим образом:

$$\underline{\alpha} \leftrightharpoons \frac{\underline{\alpha}+\overline{\alpha}}{2} \text{ и } \overline{\alpha} \leftrightharpoons \overline{\alpha}.$$

На **четвертом шаге** проверяем, достигли ли мы заданной точности вычислений. Если выполняется условие $\overline{\alpha}-\underline{\alpha} \le \Delta$, то определяем значение левой границы оценочного интервала $\alpha^{*}=\overline{\alpha}$. В противном случае переходим на шаг 2.

Поиск правой границы оценки.

На **втором шаге** ИСЛУ (2.2) пополняется новым уравнением и принимает вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} \varepsilon_{ij} x_j = [\alpha_i;\beta_i], \quad i=1,\dots,n, \\ \sum\limits_{j=1}^{m} x_j = 1, \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_j x_j = \left[\dfrac{\underline{\beta}+\overline{\beta}}{2}; \overline{\beta}\right]. \end{cases}$$

Далее проверяем, является ли система (2.4) слабо разрешимой.

На **третьем шаге** производим сужение диапазона $\left[\underline{\beta};\overline{\beta}\right]$ правой границы оценки предложения ψ. Если система (2.4) является слабо разрешимой, то определяем новый диапазон:

$$\underline{\beta} \leftleftharpoons \frac{\underline{\beta}+\overline{\beta}}{2} \text{ и } \overline{\beta} \leftleftharpoons \overline{\beta}.$$

Если же система (2.4) не является разрешимой, то переопределяем диапазон левой границы следующим образом:

$$\underline{\beta} \leftleftharpoons \underline{\beta} \quad \text{и} \quad \overline{\beta} \leftleftharpoons \frac{\underline{\beta}+\overline{\beta}}{2}.$$

На **четвертом шаге** проверяем, достигли ли мы заданной точности вычислений. Если выполняется условие $\overline{\beta}-\underline{\beta} \leq \Delta$, то определяем значение левой границы оценочного интервала $\beta^* = \underline{\beta}$. В противном случае переходим на шаг 2.

Рассмотрим работу алгоритма на примере. Имея интервальные оценки для предложений φ_1, φ_2, φ_3, найдем максимальную интервальную оценку для предложения φ_4 с точностью вычислений $\Delta = 0{,}02$ (табл. 2).

Таблица 2

Входные данные для предсказания оценки для новой формулы

Table 2

Input data for predicting the estimate for the new formula

Формула	Оценка
$\varphi_1 = \left(P(a) \wedge Q(b)\right) \vee \overline{R(c)}$	[0,7; 0,8]
$\varphi_2 = R(c) \wedge \overline{Q(b)}$	[0,2; 0,3]
$\varphi_3 = \overline{P(a)} \vee Q(b)$	[0,8; 0,9]
$\varphi_4 = R(c)$	?

Для поиска левой границы оценочного интервала строим следующую ИСЛУ:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_2 + x_4 + x_6 + x_8 = [0;0{,}5]} \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_8 = [0{,}7;0{,}8] \\ x_2 + x_6 = [0{,}2;0{,}3] \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = [0{,}8;0{,}9] \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1 \\ x_i \in [0{,}1], \quad i = 1, \dots, 8 \end{cases}$$

В табл. 3 показаны шаги работы алгоритма. На шестой итерации выполнения алгоритма точность вычисления станет меньше заданного порога $\Delta = 0{,}02$.

Таблица 3

Шаги алгоритма предсказания оценки для новой формулы

Table 3

Steps of the estimation prediction algorithm for the new formula

Шаг	Диапазон левой оценки формулы φ_4, $\left[\underline{\alpha}; \overline{\alpha}\right]$	Результат проверки разрешимости ИСЛУ	Точность вычисления, $\overline{\alpha} - \underline{\alpha}$
1	[0; 0,5]	True	0,5
2	[0; 0,25]	True	0,25
3	[0; 0,125]	False	0,125
3	[0,125; 0,25]	True	0,125
4	[0,125; 0,1875]	False	0,0625
4	[0,1875; 0,25]	True	0,0625
5	[0,1875; 0,21875]	True	0,03125
6	[0,1875; 0,203125]	True	0,015625

Таким образом, определим левую границу оценочного интервала $\alpha^* = 0{,}203125$. Поиск правой границы осуществляется аналогично, точный ответ находится в интервале [0,984375; 1]. Следовательно, определим правую границу оценочного интервала $\beta^* = 0{,}984375$.

3. Интерфейс программной системы

Интерфейс программной системы был реализован с использованием библиотеки Tkinter, которая является стандартной библиотекой Python для создания графического пользовательского интерфейса (GUI).

Пользователь имеет возможность описывать события, используя диалоговое окно, где каждое событие представлено в виде логической формулы. Пользователь может задавать субъективные вероятности наступления этих событий, представленные подинтервалами отрезка от 0 до 1. В диалоговом окне пользователь может ввести любое количество таких формул и соответствующих им оценочных значений.

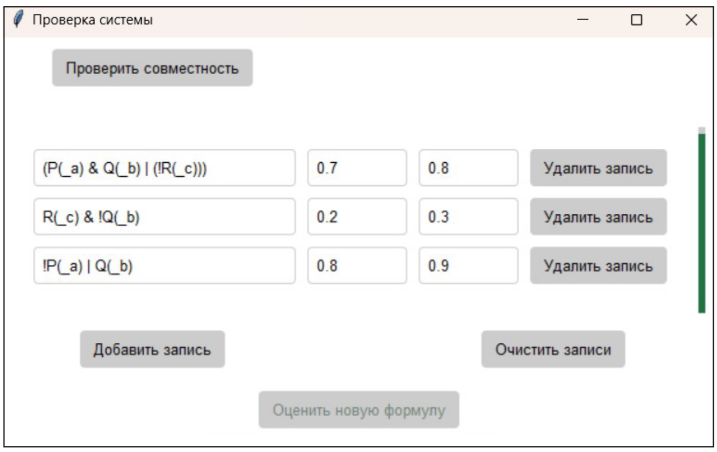

Рис. 1. Интерфейс
Fig. 1. Interface

После нажатия кнопки «Проверить совместность» введенные данные передаются на вход алгоритму проверки совместности экспертных оценок (п. 2). Результат проверки появляется на экране.

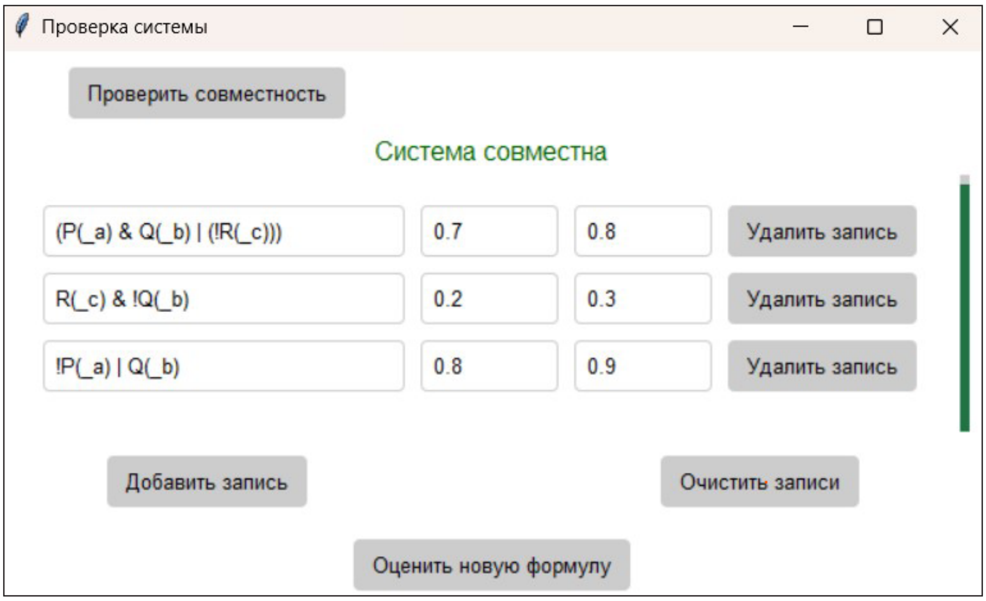

Рис. 2. Результат проверки
Fig. 2. The result of the check

В случае если введенная система оказалась совместной, пользователь может ввести новую формулу и получить оценку для нее по алгоритму из п. 3, которая не противоречит исходной системе.

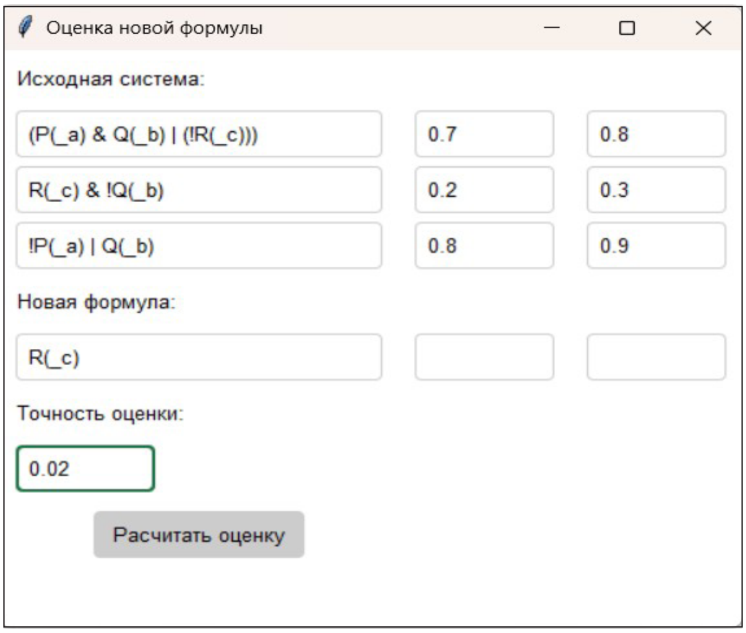

Рис. 3. Интерфейс для оценки новой формулы
Fig. 3. Interface for evaluating a new formula

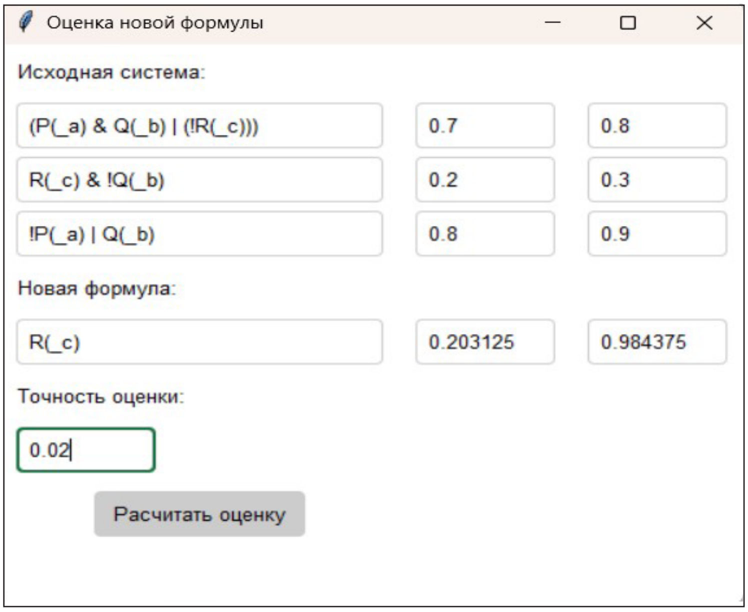

Рис. 4. Результат оценки новой формулы
Fig. 4. The result of evaluating the new formula

Заключение

В работе представлена программная система, предназначенная для проверки согласованности множества субъективных оценок событий в различных областях. События формализуются с использованием языка логики предикатов, при этом их оценки выражаются подинтервалами в диапазоне от 0 до 1. Для получения вывода о согласованности оценок строится система линейных интервальных уравнений. Кроме того, представлен инструмент для оценки нового события, используя имеющиеся оценки, что необходимо из-за ограниченной возможности экспертов оценить все возможные события в предметной области.

Список литературы

1. **Ramsey F. P.** Truth and probability // Gärdenfors P., Sahlin N.-E., eds. Decision, Probability and Utility: Selected Readings. Cambridge University Press, 1988. P. 19–47. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511609220.003
2. **Palchunov D. E., Yakhyaeva G. E.** Integration of Fuzzy Model Theory and FCA for Big Data Mining // SIBIRCON 2019 – International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences, Proceedings. 2019. P. 961–966.. DOI: 10.1109/SIBIRCON48586.2019.8958216
3. **Карасев О. И., Китаев А. Е., Миронова И. И., Шинкаренко Т. В.** Экспертные процедуры в форсайте: особенности взаимодействия с экспертами в проектах по долгосрочному прогнозированию // Вестник Санкт-Петерб. ун-та. Серия: Социология. 2017. № 2. С. 169–184. DOI: 10.21638/11701/spbu12.2017.203
4. **Yakhyaeva G., Skokova V.** Subjective Expert Evaluations in the Model-Theoretic Representation of Object Domain Knowledge // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2021. 12948 LNAI. P. 152–165. DOI: 10.1007/978-3-030-86855-0_11

5. **Малаева Е. Д., Яхъяева Г. Э.** Программная система визуализации и проверки согласованности оценочных знаний экспертов // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2023. Т. 21, № 1. С. 32–45.
6. **Yakhyaeva G. E., Palchunova O. D.** Fuzzy Models as a Formalization of Expert's Evaluative Knowledge // Pattern Recognition and Image Analysis, 2023. Vol. 33, no. 3. P. 529–535. DOI https://doi.org/10.1134/S105466182303046X
7. **Palchunov D., Yakhyaeva G.** Representation of Knowledge Using Different Structures of Concepts // CEUR Workshop Proceedings. 2020. Vol. 2729. P. 69–74.
8. **Пальчунов Д. Е., Яхъяева Г. Э.** Нечеткие алгебраические системы // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 76–93.
9. **Yakhyaeva G.** Method for Verifying the Logical Correctness of Experts' Evaluative Knowledge // 2022 IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). Yekaterinburg, Russian Federation, 2022. P. 850–854. DOI: 10.1109/SIBIRCON56155.2022.10016972
10. **Yakhyaeva G. E.** Separable Fuzzy Models // 2023 IEEE 16th Iternational conference of actual problems of electronic instrument engineering (APEIE). P. 1480–1483. DOI: 10.1109/APEIE59731.2023.10347792
11. **Yakhyaeva G. E.** On the Local Coordination of Fuzzy Valuations // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2023. Vol. 46. P. 130–144. DOI: 10.26516/1997-7670.2023.46.130
12. **Шарый С. П.** Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: XYZ, 2022. 654 с.
13. **Шарый С. П., Шарая И. А.** Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 3. С. 80–109.

References

1. **Ramsey F. P.** Truth and probability. In: *Gärdenfors P, Sahlin N-E, eds. Decision, Probability and Utility: Selected Readings*. Cambridge University Press, 1988, pp. 19–47. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511609220.003
2. **Palchunov D. E., Yakhyaeva G. E.** Integration of Fuzzy Model Theory and FCA for Big Data Mining. *SIBIRCON 2019 – International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences, Proceedings*, 2019, pp. 961–966. DOI: 10.1109/SIBIRCON48586.2019.8958216
3. **Karasev O. I., Kitaev A. E., Mironova I. I., Shinkarenko T. V.** Expert procedures in foresight: interaction with expert professionals during long-term forecasting research. *Vestnik SPbSU. Sociology*, 2017, vol. 10, iss. 2, pp. 169–184. (in Russ.) DOI: 10.21638/11701/spbu12.2017.203
4. **Yakhyaeva G., Skokova V.** Subjective Expert Evaluations in the Model-Theoretic Representation of Object Domain Knowledge. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 2021, 12948 LNAI, pp. 152–165. DOI: 10.1007/978-3-030-86855-0_11
5. **Malaeva E. D., Yakhyaeva G. E.** Software System for Visualization and Checking the Consistency of Experts' Evaluative Knowledge. *Vestnik NSU. Series: Information Technologies*, 2023, vol. 21, no. 1, pp. 32–45. (in Russ.) DOI 10.25205/1818-7900-2023-21-1-32-45
6. **Yakhyaeva G. E., Palchunova O. D.** Fuzzy Models as a Formalization of Expert's Evaluative Knowledge. *Pattern Recognition and Image Analysis*, 2023, vol. 33, no. 3, pp. 529–535. (in Russ.), https://doi.org/10.1134/S105466182303046X
7. **Palchunov D., Yakhyaeva G.** Representation of Knowledge Using Different Structures of Concepts. *CEUR Workshop Proceedings*, 2020, vol. 2729, pp. 69–74.

8. **Palchunov D. E., Yakhyaeva G. E.** Fuzzy algebraic systems. *Vestnik NSU. Series: Mathematics, mechanics, computer science*, 2010, vol. 10, no. 3, pp. 76–93. (in Russ.)
9. **Yakhyaeva G.** Method for Verifying the Logical Correctness of Experts' Evaluative Knowledge. *2022 IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON)*, Yekaterinburg, Russian Federation, 2022, pp. 850–854. DOI: 10.1109/SIBIRCON56155.2022.10016972
10. **Yakhyaeva G. E.** Separable Fuzzy Models. *2023 IEEE 16th Iternational conference of actual problems of electronic instrument engineering (APEIE)*, pp. 1480–1483. DOI: 10.1109/APEIE59731.2023.10347792
11. **Yakhyaeva G. E.** On the Local Coordination of Fuzzy Valuations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 46, pp. 130–144. DOI: 10.26516/1997-7670.2023.46.130
12. Konechnomernyj interval'nyj analiz [Finite-dimensional interval analysis]. Novosibirsk, XYZ, 2022.
13. **Sharyi S. P., Sharaya I. A.** Raspoznavanie razreshimosti interval'nykh uravnenii i ego prilozheniya k analizu dannykh [Recognizing the solvability of interval equations and its applications to data analysis]. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2013, vol. 18, no. 3, pp. 80–109.

Сведения об авторах

Дымонт Надежда Андреевна, студент НГУ

Малаева Елена Дмитриевна, студент НГУ

Яхъяева Гульнара Эркиновна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей информатики НГУ

Information about the Authors

Nadezhda A. Dymont, Student

Elena D. Malaeva, Student

Gulnara E. Yakhyaeva, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

Статья поступила в редакцию 27.04.2024;
одобрена после рецензирования 06.06.2024; принята к публикации 06.06.2024

The article was submitted 27.04.2024;
approved after reviewing 06.06.2024; accepted for publication 06.06.2024