УДК 004
DOI 10.25205/1818-7900-2018-16-1-86-99

О. Ф. Данилов [1], А. Н. Паршуков [1], И. Л. Полянская [2]

[1] *Тюменский индустриальный университет*
ул. Володарского, 38, Тюмень, 625000, Россия

[2] *Уральский государственный университет путей сообщения*
(филиал в г. Тюмени)
ул. Калинина, 5, Тюмень, 625000, Россия

danilov_of@mail.ru, *anparshukov@mail.ru*, *polyanskaya_il@inbox.ru*

МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ РОБАСТНЫХ СВОЙСТВ ЛИНЕЙНОЙ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОПИСАНИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Для линейных систем управления, состоящих из объекта управления со структурно-параметрической неопределенностью в описании и модального регулятора, обоснована мера робастных свойств устойчивости и качества управления. Разработан алгоритм вариации настроек модального регулятора, последовательно повышающий меру робастности замкнутой системы. Предложенный алгоритм может быть реализован на ЭВМ.

Ключевые слова: робастность, модальный регулятор, структурно-параметрическая неопределенность.

Введение

Классическая постановка задачи синтеза модального регулятора может быть сформулирована следующим образом. Линейный одномерный динамический объект управления P назначается дифференциальным уравнением n-го порядка, записанным в операторной форме:

$$a\,(n,p)\,y(t)=b(m,p)\,u(t),\quad a_n=1,\quad n>m\,, \tag{1}$$

здесь u – входной (управляющий) сигнал, y – выходной (управляемый) сигнал, t – непрерывное время; $a\,(n,p)$ и $b(m,p)$ – дифференциальные операторы [1].

Здесь и далее под записью $f\,(l,p)$ понимается полиномиальный оператор в степени l:

$$f\,(l,p)=\sum_{i=0}^{l} f_i\cdot p^i\ ,$$

[1] Далее предполагается, что операторы $a\,(n,p)$ и $b(m,p)$ взаимно простые, т. е. не имеют общих нулей.

Данилов О. Ф., Паршуков А. Н., Полянская И. Л. Метод повышения робастных свойств линейной замкнутой системы в условиях структурно-параметрической неопределенности описания передаточной функции объекта управления // Вестн. НГУ. Серия: Информационные технологии. 2018. Т. 16, № 1. С. 86–99.

где f_i ($i \in \overline{0,l}$) – постоянные коэффициенты, $p^i \doteq d^i / d\,t^i$ – оператор дифференцирования по времени [2]. Полиномиальному оператору $f(l,p)$ соответствует алгебраический полином $f(l,s)$:

$$f(l,s) = \sum_{i=1}^{l} f_i \cdot s^i ,$$

где s – переменная преобразования Лапласа.

Оператор $f(l,p)$ (и соответствующий полином $f(l,s)$) будем называть «точечным», подразумевая, что в пространстве коэффициентов данному оператору соответствует точка.

Качество управления назначается ограниченной односвязной областью $\boldsymbol{S}$, определяющей допустимое расположение полюсов передаточной функции (ПФ) на комплексной плоскости $\boldsymbol{C}^1$. Предполагается, что область $\boldsymbol{S}$ расположена слева от мнимой оси. В технологии синтеза модального регулятора (описанной в работе [1]) регулятор R ищется в виде дифференциального уравнения l-го порядка:

$$\beta(l,p)u(t) = \alpha(l,p)\,y(t) + \chi(l,p)g(t)\,, \quad \beta_l = 1\,, \tag{2}$$

здесь $g(t)$ – заданный эталонный сигнал. В результате ПФ замкнутой системы имеет вид

$$W^{cl.}(s) = \frac{b(m,s)\cdot\chi(l,s)}{a(n,s)\cdot\beta(l,s) - b(m,s)\cdot\alpha(l,s)}\,, \tag{3}$$

Известно, что для объекта управления, заданного дифференциальным уравнением n-го порядка, любое заданное расположение полюсов ПФ (3) можно обеспечить динамическим регулятором (2) порядка $l = n-1$ (и выше) [2]. Коэффициенты регулятора находятся из уравнения

$$a^{et.}(2n-1,s) = a(n,s)\cdot\beta(n-1,s) - b(m,s)\cdot\alpha(n-1,s)\,, \quad a^{et.}_{2n-1} = 1\,, \tag{4}$$

где за $a^{et.}(2n-1,s)$ принят характеристический полином эталонной системы. Полином $a^{et.}(2n-1,s)$ выбирается произвольным образом при условии, что все множество его корней

$$\boldsymbol{\Lambda}(a^{et.}) \doteq \{\lambda : a^{et.}(2n-1,\lambda) = 0\} \subset \boldsymbol{C}^1\,,$$

лежит внутри области $\boldsymbol{S}$, т. е. выполняется

$$\boldsymbol{\Lambda}(a^{et.}) \subset \operatorname{int}\boldsymbol{S}\,. \tag{5}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной s в левой и правой частях уравнения (4), получаем систему линейных алгебраических уравнений: $C\cdot\vec{R} = \vec{D}$, где C – матрица $C = \{c_{ij}\}$, $i \in \overline{1,2n-1}$, $j \in \overline{1,2n-1}$, составленная из коэффициентов полиномов $a(n,p)$ и $b(m,p)$ объекта (1) по правилу

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j\,, \\ a_{i-j}, & i \in \overline{j, n+j}\,, \\ 0, & i > n+j\,, \end{cases}$$

---

[2] Подразумевается, что $p^0 \doteq 1$.

при $i \in \overline{1, 2n-1}$, $j \in \overline{1, n-1}$, и

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j-n+1, \\ -b_{n+i-j-1}, & i \in \overline{j-n+1, m+j-n+1}, \\ 0, & i > m+j-n+1, \end{cases}$$

при $i \in \overline{1, n_1 + l}$, $j \in \overline{l+1, 2l+1}$; $\vec{R} \doteq col(\beta_0, \ \cdots, \ \beta_{n-2}, \ \alpha_0, \ \cdots, \ \alpha_{n-1})$ – искомый вектор коэффициентов регулятора (2); далее иногда будет удобно представлять его состоящим из двух векторов: $\vec{R}_1 \doteq col(\beta_0, \ \cdots, \ \beta_{n-2})$ и $\vec{R}_2 \doteq col(\alpha_0, \ \cdots, \ \alpha_{n-1})$, тогда вектор $\vec{R}$ символически записывать в виде $\vec{R} = col(\vec{R}_1, \ \vec{R}_2)$; $\vec{D} \doteq col(d_1, \ldots, d_{2n-1})$ – вектор, составленный из коэффициентов полиномов $a^{et.}(2n-1, s)$ и $a(n, s)$,

$$d_i = \begin{cases} a_{i-1}^{et.}, & i \in \overline{1, n-1}, \\ a_{i-1}^{et.} - a_{i-n}, & i \in \overline{n, 2n-1}. \end{cases}$$

Подобная задача синтеза регулятора и последующего анализа качества управления усложняется, если в описании объекта присутствует неопределенность. Будем выделять неопределенность объекта, связанную с неопределенностью коэффициентов дифференциального уравнения (1) (параметрическая неопределенность), и неопределенность, связанную с неточностью задания порядка дифференциального уравнения (структурная неопределенность). Проблема синтеза регулятора и анализа качества управления в условиях структурно-параметрической неопределенности описания в объекте P достаточно широко представлена в литературе. Можно выделить два главных направления, в рамках которых решается такая задача:

1) принцип исключения нуля;
2) методы теории H^{∞}.

Принцип исключения нуля впервые сформулирован в работах [4; 5]. Обобщениям принципа исключения нуля на различные случаи, а также разработке на их основе вычислительных методик проверки робастной устойчивости и качества управления посвящено большое количество статей, например, [6–9], а также [3]. Следует отметить, что критерии, предложенные в перечисленных работах (за исключением статьи [3]) требуют, чтобы количество нулей и полюсов в ПФ замкнутой системы было конечно, и, более того, заранее известно, что делает данные критерии пригодными для исследования в условиях параметрической неопределенности, но противоречит понятию структурной неопределенности. Кроме того, задача синтеза регулятора заданного динамического порядка, оптимального с точки зрения робастных свойств устойчивости и робастного качества управления [3] для замкнутой системы остается нерешенной.

Методы теории H^{∞}, представленные в работах [10–13] и др., позволяют формулировать достаточное условие робастной устойчивости при наличии структурно-параметрической неопределенности описания, однако существенным недостатком таких критериев является использование H^{∞} метрики операторов, что сильно ограничивает классы операторов, для которых выполняются условия этих критериев.

В настоящей статье развиваются результаты, полученные нами в [3]. В указанной работе введена функция (которую можно рассматривать в качестве меры робастных свойств), позволяющая сравнивать свойства робастности замкнутых систем, состоящих из одного объекта управления, но с разными настройками регулятора. В данной статье разрабатывается ал-

[3] Далее для краткости изложения будем использовать слова *робастные свойства* или *робастность*, подразумевая под ними *робастную устойчивость* и *робастное качество управления.*

горитм вариации настроек регулятора заданного порядка, последовательно повышающий меру робастности замкнутой системы.

Постановка задачи

Объект управления P со структурно-параметрической неопределенностью будем задавать в виде

$$E'(q,p)\cdot A(n,p)\,y(t)=E''(v,p)\cdot B(m,p)\,u(t)\,,\quad n\ge m\,,\quad q\ge v\,, \tag{6}$$

здесь $A(n,p)$, $B(m,p)$, $E'(q,p)$, $E''(v,p)$ – семейства (множества) дифференциальных операторов:

$$A(n,p)=a_0\left(n,p\right)+\Delta A(n,p)\,,\quad a_0\left(n,p\right)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\cdot p^i+p^n\,,\quad \vec{A}_0\dot{=}col\left(a_0,\ \cdots,\ a_{n-1},\ 1\right),$$

$$\Delta A(n,p)\dot{=}\left\{\delta a\,(n,\delta\vec{A})\doteq\sum_{i=0}^{n}\delta a_i\cdot p^i:\delta\vec{A}\dot{=}col\,(\delta a_0,\ \cdots,\ \delta a_n)\in\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{R}^{n+1},-\vec{A}_0\notin\boldsymbol{A}\right\},$$

$$B(m,p)=b_0\left(m,p\right)+\Delta B(m,p)\,,\quad b_0\left(m,p\right)=\sum_{i=0}^{m}b_i\cdot p^i\,,\quad \vec{B}_0\dot{=}col\left(b_0,\ \cdots,\ b_m\right),$$

$$\Delta B(n_2,p)\dot{=}\left\{\delta b\,(m,\delta\vec{B})\doteq\sum_{i=0}^{m}\delta b_i\cdot p^i:\delta\vec{B}\dot{=}col\left(\delta b_0,\ \cdots,\ \delta b_m\right)\in\boldsymbol{B}\subset\boldsymbol{R}^{m+1},-\vec{B}_0\notin\boldsymbol{B}\right\},$$

$$E'(q,p)=e_0'\left(q,p\right)+\Delta E'(q,p)\,,\quad e_0'\left(q,p\right)=1+\sum_{i=1}^{q}e_i'\cdot p^i\,,\ \vec{E}_0'\dot{=}col\left(e_1',\ \cdots,\ e_q'\right),$$

$$\Delta E'(q,p)\dot{=}\left\{\delta e'\,(q,\delta\vec{E}')\doteq\sum_{i=1}^{q}\delta e_i'\cdot p^i:\delta\vec{E}'\dot{=}col\left(\delta e_1',\ \cdots,\ \delta e_q'\right)\in\boldsymbol{E}_1\subset\boldsymbol{R}^{q},-\vec{E}_0'\notin\boldsymbol{E}_1\right\},$$

$$E''(v,p)=e_0''\left(v,p\right)+\Delta E''(v,p)\,,\quad e_0''\left(v,p\right)=1+\sum_{i=1}^{v}e_i''\cdot p^i\,,\ \vec{E}_0''\dot{=}col\left(e_1'',\ \cdots,\ e_v''\right),$$

$$\Delta E''(v,p)\dot{=}\left\{\delta e''\,(v,\delta\vec{E}'')\doteq\sum_{i=1}^{v}\delta e_i''\cdot p^i:\delta\vec{E}''\dot{=}col\left(\delta e_1'',\ \cdots,\ \delta e_v''\right)\in\boldsymbol{E}_2\subset\boldsymbol{R}^{v},-\vec{E}_0''\notin\boldsymbol{E}_2\right\}.$$

Далее предполагаем, что области $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ в (6) связны.

В записи (6) подразумевается, что пара $\left(E'\left(q,p\right),\ \ E''\left(v,p\right)\right)$ описывает ту часть объекта управления, для которой уже выполняются свойства устойчивости и качества управления, заданного областью $\boldsymbol{S}$; т. е. предполагается, что для всех операторов из множеств $E'(q,p)$ и $E''(v,p)$ выполняются

$$\boldsymbol{\Lambda}(E')\subset\operatorname{int}\boldsymbol{S}\,,\quad \boldsymbol{\Lambda}(E'')\subset\operatorname{int}\boldsymbol{S}\,, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{\Lambda}(E')$ и $\boldsymbol{\Lambda}(E'')$ обозначены множества нулей всех дифференциальных операторов $E'(q,p)$ и $E''(v,p)$ соответственно. Очевидно, регулировать следует только оставшуюся часть объекта управления (т. е. операторы $A(n,p)$, $B(m,p)$); в этом смысле пара $\left(E'\left(q,p\right),\ \ E''\left(v,p\right)\right)$ далее будет именоваться «структурными возмущениями», а $\left(A\left(n,p\right),\ \ B\left(m,p\right)\right)$ – «основной динамикой» (подлежащей регулированию).

Для объекта (6) регулятор (2) (порядка $l=n-1$) будем рассчитывать по классической схеме синтеза, изложенной в предыдущем разделе; в качестве «точечного» объекта управления (1) примем P_0:

$$a_0\ (n,p)\,y(t)=b_0\,(m,p)\,u(t),$$

где операторы $a_0\left(n,p\right)$ и $b_0\left(m,p\right)$ принадлежат основной динамике объекта (6).

Замыкая объект (6) рассчитанным регулятором, получим ПФ:

$$W^{cl.}(s)=\frac{E''(v,s)\cdot B(m,s)\cdot\chi(n-1,s)}{E'(q,s)\cdot A(n,s)\cdot\beta(n-1,s)-E''(v,s)\cdot B(m,s)\cdot\alpha(n-1,s)}.$$

Знаменатель ПФ $W^{cl.}\left(s\right)$ является характеристическим полиномом замкнутой системы:

$$A^{cl.}(2n+q-1,s)=E'(q,s)\cdot A(n,s)\cdot\beta(n-1,s)-E''(v,s)\cdot B(m,s)\cdot\alpha(n-1,s).$$

С учетом определений операторов $A(n,p)$, $B(m,p)$, $E'(q,p)$ и $E''(v,p)$ в (6) получим окончательное выражение для $A^{cl.}\left(2n+q-1,s\right)$:

$$\begin{gathered}A^{cl.}\left(2n+q-1,s\right)=\Big\{a^{cl.}\left(2n+q-1,s\right)\doteq \mathrm{e}'\left(q,\delta\vec{E}'\right)\cdot\left(a^{et.}\left(2n-1,s\right)+\delta\,a\left(n,\delta\vec{A}\right)\cdot\beta\left(n-1,s\right)-\right.\\ \left.-\delta\,b\left(m,\delta\vec{B}\right)\cdot\alpha\left(n-1,s\right)\right)+\left(\mathrm{e}'\left(q,\delta\vec{E}'\right)-\mathrm{e}''\left(v,\delta\vec{E}''\right)\right)\cdot b\left(m,s\right)\cdot\alpha\left(n-1,s\right):\\ \forall\delta\vec{A}\in\boldsymbol{A},\delta\vec{B}\in\boldsymbol{B},\delta\vec{E}'\in\boldsymbol{E}_1,\delta\vec{E}''\in\boldsymbol{E}_2\Big\}.\end{gathered}\tag{8}$$

Следуя статье [3], для семейства полиномов (8) введем новое множество функций, определенных следующим образом: каждый элемент $a^{cl.}\left(2n+q-1,s\right)$ множества (8) разделим на полином $e'(q,\delta\vec{E}')$, получим новый элемент

$$\tilde{a}^{cl.}(2n-1,s)\doteq\frac{a^{cl.}(2n+q-1,s)}{e'(q,\delta\vec{E}')},$$

или, в развернутом виде,

$$\begin{gathered}\tilde{a}^{cl.}(2n-1,s)=a^{et.}(2n-1,s)+\delta\,a(n,\delta\vec{A})\cdot\beta(n-1,s)-\\ -\delta\,b(m,\delta\vec{B})\cdot\alpha(n-1,s)+\left(1-\frac{e''(v,\delta\vec{E}'')}{e'(q,\delta\vec{E}'')}\right)\cdot b(m,s)\cdot\alpha(n-1,s).\end{gathered}$$

Множество элементов $\tilde{a}^{cl.}\left(2n-1,s\right)$ обозначим за $\tilde{A}^{cl.}\left(2n-1,s\right)$, таким образом:

$$\begin{gathered}\tilde{A}^{cl.}(2n-1,s)\doteq\Bigg\{\tilde{a}^{cl.}(2n-1,s)\doteq a^{et.}(2n-1,s)+\delta\,a(n,\delta\vec{A})\cdot\beta(n-1,s)-\delta\,b(m,\delta\vec{B})\cdot\alpha(n-1,s)+\\ +\left(1-\frac{e''\left(v,\delta\vec{E}''\right)}{e'\left(q,\delta\vec{E}'\right)}\right)\cdot b\left(m,s\right)\cdot\alpha\left(n-1,s\right):\forall\delta\vec{A}\in\boldsymbol{A},\delta\vec{B}\in\boldsymbol{B},\delta\vec{E}'\in\boldsymbol{E}_1,\delta\vec{E}''\in\boldsymbol{E}_2\Bigg\}.\end{gathered}\tag{9}$$

Как следует из определения (9), семейство $\tilde{A}^{cl.}\left(2n-1,s\right)$ представляет собой множество дробных функций $\tilde{a}^{cl.}\left(2n-1,s\right)$, каждая из которых имеет (в общем случае) $2n+q-1$ нулей и q полюсов. В этом смысле будем говорить, что и семейство $\tilde{A}^{cl.}\left(2n-1,s\right)$ имеет $2n+q-1$ нулей и q полюсов. В соответствии с условием (7), все полюса дробных функций $\tilde{a}^{cl.}\left(2n-1,s\right)$ лежат внутри области $\boldsymbol{S}$.

Пусть из множества функций $\tilde{A}^{cl.}(2n-1,s)$ найдется хотя бы одна такая, что все ее нули лежат внутри области $\boldsymbol{S}$, тогда потеря количества нулей функции $\tilde{a}^{cl.}(2n-1,s)$, находящихся внутри области $\boldsymbol{S}$, происходит только в следующих случаях:

1) при вариациях векторов $\delta\vec{A}$, $\delta\vec{B}$, $\delta\vec{E}'$, $\delta\vec{E}''$ в (6) часть нулей и полюсов функции $\tilde{a}^{cl.}(2n-1,s)$ в (9) совпадает (поскольку совпадающие нули и полюса находятся внутри области $\boldsymbol{S}$, то их сокращение не повлияет на вариацию аргумента функции $\tilde{a}^{cl.}(2n-1,s)$);

2) при переходе (хотя бы) одного нуля функции $\tilde{a}^{cl.}(2n-1,s)$ через границу области $\boldsymbol{S}$.

Утверждение 1. Пусть

1) все множество нулей семейства полиномов $E'(q,p)$ лежит внутри области $\boldsymbol{S}$;

2) семейство функций (9) содержит хотя бы одну такую, что все ее нули лежат внутри $\boldsymbol{S}$.

Тогда для того, чтобы (все) множество нулей функций (9) лежало внутри области $\boldsymbol{S}$, достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\rho_- > 0,$$

где введены обозначения:

$$\rho_- = \min_{\forall s\in\partial\boldsymbol{S}} \rho(s), \tag{10}$$

$$\rho(s) = \rho_1(s) - \rho_2(s), \tag{11}$$

$$\rho_1(s) = \min_{\forall\delta\vec{A}\in\boldsymbol{A},\,\delta\vec{B}\in\boldsymbol{B}} \left| a^{et.}(2n-1,s) + \delta a(n,\delta\vec{A})\cdot\beta(n-1,s) - \delta b(m,\delta\vec{B})\cdot\alpha(n-1,s) \right|,$$

$$\rho_2(s) = \mu(s)\cdot b_+(s)\cdot\left|\alpha(n-1,s)\right|,$$

$$\mu(s) = \max_{\forall\delta\vec{E}'\in\boldsymbol{E}_1,\ \delta\vec{E}''\in\boldsymbol{E}_2} \left| 1 - \frac{e''(v,\delta\vec{E}'')}{e'(q,\delta\vec{E}')} \right|,$$

$$b_+(s) = \max_{\forall\delta\vec{B}\in\boldsymbol{B}} \left| b_0(m,s) + \delta b(m,\delta\vec{B}) \right|.$$

Доказательство данного утверждения следует из результатов, изложенных в статье [3].

Утверждение 1 формулирует достаточное условие робастной устойчивости и робастного качества управления для (8).

Функция ρ_- может служить в качестве оценки свойств робастного качества управления. Расчет функции $\rho(s)$ для каждой точки s границы области $\boldsymbol{S}$ сводится к решению задач поиска экстремумов функций с ограничениями на векторы варьируемых параметров, заданных областями $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$. Указанная задача поиска условного экстремума функций решается методом неопределенных множителей Лагранжа.

В настоящей работе мы воспользуемся свободой в выборе расположения нулей эталона $a^{et.}(2n-1,s)$ (ограниченной условием (5)) с целью максимизации ρ_-. Ниже излагается алгоритм поиска вектора $\vec{R}$ коэффициентов регулятора (2), максимизирующего [4] значение ρ_-.

Основной результат.
Алгоритм повышения робастных свойств

Рассмотрим процедуру повышения ρ_- как итерационный процесс; обозначим за k номер итерации алгоритма. Для удобства изложения номер итерации будем указывать в качестве первого из аргументов векторов и функций; например, вектор $\vec{R}$, полином $a^{et.}(2n-1,s)$,

[4] Имеется в виду локальный максимум функции ρ_- в пространстве векторов $\vec{R}$.

функции $\rho(s)$, ρ_- и т. д. далее будут записаны как $\vec{R}(k)$, $a^{et.}(k,2n-1,s)$, $\rho(k,s)$ и $\rho_-(k)$, соответственно.

Вектору $\vec{R}(k)$ соответствует характеристический полином эталона $a^{et.}(k,2n-1,s)$, который определяется формулой

$$a^{et.}(k,2n-1,s)=a_0(n,s)\cdot\beta(k,n-1,s)-b_0(m,s)\cdot\alpha(k,n-1,s), \tag{12}$$

где $a_0(n,s)$ и $b_0(m,s)$ – полиномы, принадлежащие основной динамике объекта управления (6). На вариации вектора $\vec{R}(k)$ будем накладывать условие

$$\boldsymbol{\Lambda}\left(a^{et.}\right)\subset \operatorname{int}\boldsymbol{S}, \tag{13}$$

здесь за $\boldsymbol{\Lambda}\left(a^{et.}\right)$ обозначено множество нулей полинома $a^{et.}(k,2n-1,s)$. Требование выполнения условия (13) на каждой итерации алгоритма является существенным, поскольку в противном случае нельзя гарантировать выполнения всех условий утверждения 1.

На начальной итерации ($k=0$) алгоритма вектор $\vec{R}(0)$ рассчитывается по формуле (12) для заданного полинома $a^{et.}(0,2n-1,s)$ (выбираемого из условия (13)). Для $\vec{R}(0)$ по формулам (10) и (11) определяются $\rho(0,s)$ и $\rho_-(0)$.

На очередной k-й итерации алгоритма будем искать вектор $\vec{R}(k)$ такой, что:

1) после подстановки его коэффициентов в (12) для $a^{et.}(k,2n-1,s)$ выполняется (13);
2) выполняется

$$\rho_-(k)>\rho_-(k-1). \tag{14}$$

Обоснование алгоритма

Обозначим за $\boldsymbol{\Omega}$ все множество точек s границы $\partial\boldsymbol{S}$, в которых функция $\rho(k-1,s)$ принимает минимальное значение:

$$\boldsymbol{\Omega}\doteq\left\{s(i):s(i)\doteq\arg\min_{s\in\partial\boldsymbol{S}}\rho(k-1,s)\right\}\subset\partial\boldsymbol{S}.$$

Предполагая, что число $N(k)$ таких точек на границе $\partial\boldsymbol{S}$ на k-й итерации алгоритма конечно, множество $\boldsymbol{\Omega}$ может быть переписано в виде

$$\boldsymbol{\Omega}=\left\{s(i)=\arg\min_{s\in\partial\boldsymbol{S}}\rho(k-1,s):\forall i\in\boldsymbol{I}\doteq\overline{1,N(k)}\right\}.$$

Для каждой точки $s(i)$ ($s(i)\in\boldsymbol{\Omega}$) найдем нормированный обобщенный [5] градиент функции $\rho(k-1,s)$ по $\vec{R}$ (обозначим его за $\vec{\Theta}(i)$) [6]:

$$\vec{\Theta}(i)\doteq\begin{cases}\dfrac{\vec{\Phi}_1(i)-\vec{\Phi}_2(i)}{\left|\vec{\Phi}_1(i)-\vec{\Phi}_2(i)\right|}, & \text{если}\quad \vec{\Phi}_1(i)\neq\vec{\Phi}_2(i),\\ \vec{0}^{\mathrm{T}}, & \text{если}\quad \vec{\Phi}_1(i)=\vec{\Phi}_2(i);\end{cases}$$

[5] Слово «обобщенный» означает, что в тех случаях, когда градиент не определен, он доопределяется как нулевой вектор [14].

[6] Здесь и далее под записью $\vec{0}$ понимается вектор-столбец соответствующей размерности, состоящий из нулей.

$$\vec{\Phi}_1(i)=\begin{cases}\min\limits_{\forall\delta\vec{A}\in\boldsymbol{A},\,\delta\vec{B}\in\boldsymbol{B}}\left[\dfrac{\left(\vec{V}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{R}+\tau^{\mathrm{Re}}\right)\cdot\vec{V}^{\mathrm{Re}}+\left(\vec{V}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{R}+\tau^{\mathrm{Im}}\right)\cdot\vec{V}^{\mathrm{Im}}}{\sqrt{\left(\vec{V}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{R}+\tau^{\mathrm{Re}}\right)^2+\left(\vec{V}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{R}+\tau^{\mathrm{Im}}\right)^2}}\right]\Bigg|_{\substack{\vec{R}=\vec{R}(k-1)\\ s=s(i)}}, \\ \quad\text{если}\ \min\limits_{\forall\delta\vec{A}\in\boldsymbol{A},\,\delta\vec{B}\in\boldsymbol{B}}\left[\left(\vec{V}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{R}+\tau^{\mathrm{Re}}\right)^2+\left(\vec{V}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{R}+\tau^{\mathrm{Im}}\right)^2\right]\Big|_{\substack{\vec{R}=\vec{R}(k-1)\\ s=s(i)}}\neq 0; \\ \vec{0}^{\mathrm{T}},\quad\text{если}\ \min\limits_{\forall\delta\vec{A}\in\boldsymbol{A},\,\delta\vec{B}\in\boldsymbol{B}}\left[\left(\vec{V}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{R}+\tau^{\mathrm{Re}}\right)^2+\left(\vec{V}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{R}+\tau^{\mathrm{Im}}\right)^2\right]\Big|_{\substack{\vec{R}=\vec{R}(k-1)\\ s=s(i)}}=0;\end{cases}$$

$$\vec{\Phi}_2(i)=\begin{cases}\left(\vec{0}^{\mathrm{T}},\quad\mu(s)\cdot b_+(s)\cdot\left[\dfrac{\left(\vec{\Xi}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{R}\right)\cdot\vec{\Xi}^{\mathrm{Re}}+\left(\vec{\Xi}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{R}\right)\cdot\vec{\Xi}^{\mathrm{Im}}}{\sqrt{\left(\vec{\Xi}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{R}\right)^2+\left(\vec{\Xi}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{R}\right)^2}}\right]\Bigg|_{\substack{\vec{R}=\vec{R}(k-1)\\ s=s(i)}}\right)\in\boldsymbol{R}^{2n-1}, \\ \quad\text{если}\ \left|\alpha(n-1,s)\right|\Big|_{\substack{\vec{R}_2=\vec{R}_2(k-1)\\ s=s(i)}}\neq 0,\quad\text{и}\quad\mu(s)\big|_{s=s(i)}\neq 0,\quad\text{и}\quad b_+(s)\big|_{s=s(i)}\neq 0; \\ \vec{0}^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{2n-1}, \\ \text{если}\ \left|\alpha(n-1,s)\right|\Big|_{\substack{\vec{R}_2=\vec{R}_2(k-1)\\ s=s(i)}}=0,\quad\text{или}\quad\mu(s)\big|_{s=s(i)}=0,\quad\text{или}\quad b_+(s)\big|_{s=s(i)}=0;\end{cases}$$

$$\vec{V}^{\mathrm{Re}}\doteq\left(\mathrm{Re}(\upsilon_1),\ \cdots,\ \mathrm{Re}(\upsilon_{2n-1})\right),\qquad \vec{V}^{\mathrm{Im}}\doteq\left(\mathrm{Im}(\upsilon_1),\ \cdots,\ \mathrm{Im}(\upsilon_{2n-1})\right),$$

$$\vec{\Xi}^{\mathrm{Re}}\doteq\left(\mathrm{Re}(\xi_1),\ \cdots,\ \mathrm{Re}(\xi_n)\right),\qquad \vec{\Xi}^{\mathrm{Im}}\doteq\left(\mathrm{Im}(\xi_1),\ \cdots,\ \mathrm{Im}(\xi_n)\right),$$

$$\nu_j=\begin{cases}\left(a_0(n,s)+\delta a(n,\delta\vec{A})\right)\cdot s^{j-1}, & j\in\overline{1,n-1},\\ -\left(b_0(m,s)+\delta b(m,\delta\vec{B})\right)\cdot s^{j-n}, & j\in\overline{n,2n-1},\end{cases}\qquad \xi_j=s^{j-1},\qquad j\in\overline{1,n},$$

$$\tau^{\mathrm{Re}}=\mathrm{Re}\left(\left(a_0(n,s)+\delta a\left(n,\delta\vec{A}\right)\right)\cdot s^{n-1}\right),\qquad \tau^{\mathrm{Im}}=\mathrm{Im}\left(\left(a_0(n,s)+\delta a\left(n,\delta\vec{A}\right)\right)\cdot s^{n-1}\right).$$

Множество обобщенных градиентов $\vec{\Theta}(i)$, вычисленных для всех точек множества $\boldsymbol{\Omega}$ обозначим как $\boldsymbol{\Theta}$: $\boldsymbol{\Theta}\doteq\left\{\vec{\theta}(i),\forall i\in\boldsymbol{I}\right\}\subset\boldsymbol{R}^{2n-1}$. Индексное множество $\boldsymbol{I}$ разделим на два подмножества

$$\boldsymbol{I}_1=\left\{i:\vec{\Theta}(i)\neq\vec{0},\quad i\in\boldsymbol{I},\quad\vec{\Theta}(i)\in\boldsymbol{\Theta}\right\},\quad \boldsymbol{I}_2=\left\{i:\vec{\Theta}(i)=\vec{0},\quad i\in\boldsymbol{I},\quad\vec{\Theta}(i)\in\boldsymbol{\Theta}\right\}.$$

В случае если $\boldsymbol{I}_1$ не пусто, из множества $\boldsymbol{\Theta}$ формируем два множества

$$\boldsymbol{\Theta}^+=\left\{\vec{\Theta}(i):i\in\boldsymbol{I}_1,\quad\vec{\Theta}(i)\in\boldsymbol{\Theta}\right\},\qquad \boldsymbol{\Theta}^-=\left\{-\vec{\Theta}(i):i\in\boldsymbol{I}_1,\quad\vec{\Theta}(i)\in\boldsymbol{\Theta}\right\}.$$

Множества $\boldsymbol{\Theta}^+$ и $\boldsymbol{\Theta}^-$ определяют направления градиентов и антиградиентов для функции $\rho(k-1,s)$ в точках s множества $\boldsymbol{\Omega}$.

Пусть существует вектор $\vec{\Psi}$ ($\vec{\Psi}\in\boldsymbol{R}^{2n-1}$) такой, что выполняются условия

$$\vec{\Psi}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{\Theta}^+(i)>\varepsilon_0,\qquad\&\qquad\vec{\Psi}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{\Theta}^-(i)<-\varepsilon_0,\qquad\forall i\in\boldsymbol{I}_1,\left(\varepsilon_0>0\right),\tag{15}$$

тогда вектор $\vec{\Psi}$ определяет направление возрастания функции $\rho(k-1,s)$ во всех точках минимума $\boldsymbol{\Omega}$ (разумеется, за исключением тех точек, где градиент $\vec{\Theta}(i)$ обращается в ноль). Проблема построения (поиска) вектора $\vec{\Psi}$, обеспечивающего выполнение условий (15), может быть решена одним из алгоритмов построения «фазового портрета» (например, алгоритмом Гаусса – Зайделя [7], изложенным в [14]).

Если $\vec{\Psi}$ существует, вектор $\vec{R}(k)$ будем искать в виде

$$\vec{R}(k)=\vec{R}(k-1)+\gamma\cdot\vec{\Psi}/\Psi, \quad (\gamma>0), \tag{16}$$

где за Ψ обозначен модуль вектора $\vec{\Psi}$, γ – параметр, определяющий величину шага алгоритма вдоль выбранного направления $\vec{\Psi}$. Шаг γ будем выбирать из условий (13) и (14) (к вопросу выбора такого γ мы еще вернемся).

Случай $\boldsymbol{I}_1=\emptyset$ означает, что во всех точках множества $\boldsymbol{\Omega}$ градиент функции $\rho(k-1,s)$ по $\vec{R}$ либо не определен, либо равен нулю [8]. В этом случае в (16) в качестве вектора $\vec{\Psi}$ последовательно выбираются векторы ортонормированного базиса в $\boldsymbol{R}^{2n-1}$.

Условия останова алгоритма (16):

1) не существует (не найден) вектор $\vec{\Psi}$, являющийся решением задачи (15) [9];

2) выполнение условий достижения локального максимума функции $\rho(k,s)$ по параметру γ хотя бы в одной из точек $s(i)$ множества $\boldsymbol{\Omega}$ [10]:

$$\left[\frac{d\rho_1(k,s)}{d\gamma}\right]\Bigg|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}-\left[\frac{d\rho_2(k,s)}{d\gamma}\right]\Bigg|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}=0,$$

$$\left[\frac{d^2\rho_1(k,s)}{d\gamma^2}\right]\Bigg|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}-\left[\frac{d^2\rho_2(k,s)}{d\gamma^2}\right]\Bigg|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}<0, \quad i\in\boldsymbol{I}_2. \tag{17}$$

Здесь использованы обозначения

$$\left[\frac{d\rho_1(k,s)}{d\gamma}\right]\Bigg|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}=\begin{cases}\min\limits_{\forall\delta\vec{A}\in\boldsymbol{A},\,\delta\vec{B}\in\boldsymbol{B}}\left(\dfrac{\eta(\gamma)}{\sqrt{\varsigma(\gamma)}}\Bigg|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}\right), & \text{если} \quad \varsigma(\gamma)\big|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}\neq 0,\\ 0, & \text{если} \quad \varsigma(\gamma)\big|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}=0,\end{cases}$$

---

[7] Данный алгоритм позволяет построить вектор $\vec{\Psi}$ (конечно, если он вообще существует), за число шагов, не превышающее значения $4/\varepsilon_0^2$ (здесь ε_0 предполагается заданным); если алгоритм за указанное число шагов не находит искомый вектор, следовательно, его не существует.

[8] Иначе говоря, в соответствующих точках s ($s\in\boldsymbol{\Omega}$) функция $\rho(k-1,s)$ достигла локального экстремума по $\vec{R}$.

[9] Вектор $\vec{\Psi}$, являющийся решением задачи (15), определяет направление возрастания функции $\rho(k-1,s)$ общее для всех точек из множества $\boldsymbol{\Omega}$; если такого вектора не существует, то $\vec{R}(k-1)$ соответствует локальному максимуму функции ρ_- по $\vec{R}$.

[10] Очевидно, нет необходимости проверять выполнение условий, входящих в выражения (17), для всех точек множества $\boldsymbol{\Omega}$ – подозрительными на локальный максимум являются те точки из множества $\boldsymbol{\Omega}$, в которых вектор обобщенного градиента $\vec{\Theta}(i)$ обращается в ноль, т. е. такие точки $s(i)$, где $i\in\boldsymbol{I}_2$.

$$\left[\frac{d\rho_2(k,s)}{d\gamma}\right]\Bigg|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}=\begin{cases}\mu(s)\cdot b_+(s)\cdot\dfrac{\sigma(\gamma)}{\sqrt{\omega(\gamma)}}\Bigg|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}, & \text{если}\quad \omega(\gamma)\big|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}\neq 0,\\ 0, & \text{если}\quad \omega(\gamma)\big|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}=0,\end{cases}$$

$$\eta(\gamma)=\left(\vec{\Phi}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{R}(k-1)+\vec{\Phi}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{\Psi}\cdot{}^{\gamma}\!/_{\Psi}+\tau^{\mathrm{Re}}\right)\cdot\vec{\Phi}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{\Psi}\cdot{}^{1}\!/_{\Psi}+$$
$$+\left(\vec{\Phi}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{R}(k-1)+\vec{\Phi}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{\Psi}\cdot{}^{\gamma}\!/_{\Psi}+\tau^{\mathrm{Im}}\right)\cdot\vec{\Phi}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{\Psi}\cdot{}^{1}\!/_{\Psi},$$

$$\varsigma(\gamma)=\left(\vec{\Phi}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{R}(k-1)+\vec{\Phi}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{\Psi}\cdot{}^{\gamma}\!/_{\Psi}+\tau^{\mathrm{Re}}\right)^2+\left(\vec{\Phi}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{R}(k-1)+\vec{\Phi}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{\Psi}\cdot{}^{\gamma}\!/_{\Psi}+\tau^{\mathrm{Im}}\right)^2,$$

$$\sigma(\gamma)=\left(\vec{\Xi}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{R}_2(k-1)+\vec{\Xi}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{\Psi}_2\cdot{}^{\gamma}\!/_{\Psi}\right)\vec{\Xi}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{\Psi}_2\cdot{}^{1}\!/_{\Psi}+$$
$$+\left(\vec{\Xi}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{R}_2(k-1)+\vec{\Xi}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{\Psi}_2\cdot{}^{\gamma}\!/_{\Psi}\right)\vec{\Xi}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{\Psi}_2\cdot{}^{1}\!/_{\Psi},\quad \vec{\Psi}_2\doteq col\left(\psi_{n-1},\ \cdots,\ \psi_{2n-1}\right),$$

$$\omega(\gamma)=\left(\vec{\Xi}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{R}_2 2(k-1)+\vec{\Xi}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{\Psi}_2\cdot{}^{\gamma}\!/_{\Psi}\right)^2+\left(\vec{\Xi}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{R}_2 2(k-1)+\vec{\Xi}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{\Psi}_2\cdot{}^{\gamma}\!/_{\Psi}\right)^2,$$

$$\left[\frac{d^2\rho_1(k,s)}{d\gamma^2}\right]\Bigg|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}=\begin{cases}\min\limits_{\substack{\forall\delta\vec{A}\in\boldsymbol{A},\\ \forall\delta\vec{B}\in\boldsymbol{B}}}\left[\dfrac{1}{\sqrt{\eta(\gamma)}}\cdot\left(\eta'_\gamma(\gamma)-\left(\dfrac{\eta(\gamma)}{\sqrt{\xi(\gamma)}}\right)^2\right)\right]\Bigg|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}, & \text{если}\quad \xi(\gamma)\big|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}\neq 0,\\ 0, & \text{если}\quad \xi(\gamma)\big|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}=0,\end{cases}$$

$$\left[\frac{d^2\rho_2(k,s)}{d\gamma^2}\right]\Bigg|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}=\begin{cases}\left[\dfrac{\mu(s)\cdot b_+(s)}{\sqrt{\omega(\gamma)}}\cdot\left(\sigma'_\gamma(\gamma)-\left(\dfrac{\sigma(\gamma)}{\sqrt{\omega(\gamma)}}\right)^2\right)\right]\Bigg|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}, & \text{если}\quad \omega(\gamma)\big|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}\neq 0,\\ 0, & \text{если}\quad \omega(\gamma)\big|_{\substack{\gamma=0\\ s=s(i)}}=0,\end{cases}$$

здесь $\eta'_\gamma(\gamma)$ и $\sigma'_\gamma(\gamma)$ – производные функций $\eta(\gamma)$ и $\sigma(\gamma)$ по переменной γ:

$$\eta'_\gamma(\gamma)=\left(\vec{\Phi}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{\Psi}\cdot{}^{1}\!/_{\Psi}\right)^2+\left(\vec{\Phi}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{\Psi}\cdot{}^{1}\!/_{\Psi}\right)^2,\qquad \sigma'_\gamma(\gamma)=\left(\vec{\Xi}^{\mathrm{Re}}\cdot\vec{\Psi}_2\cdot{}^{1}\!/_{\Psi}\right)^2+\left(\vec{\Xi}^{\mathrm{Im}}\cdot\vec{\Psi}_2\cdot{}^{1}\!/_{\Psi}\right)^2.$$

Если ни одно из перечисленных условий останова не выполняется, определяется шаг γ алгоритма (16). По смыслу поиск такого γ (удовлетворяющего условиям (13) и (14)) состоит из 2-х этапов.

Этап 1. Определяется открытый интервал [11] (обозначим его за Γ):

$$\Gamma=[0,\ \ \gamma^*),\quad \gamma^*>0,$$

где за γ^* обозначено такое значение параметра γ в (16), при котором нули полинома $a^{et.}(k,2n-1,s)$ в (12) выходят на границу области $\boldsymbol{S}$. Искомое значение γ^* (если оно существует) определяется формулой

$$\gamma^*=\min_{i\in\boldsymbol{I}_2}\gamma_+\left(s(i)\right),\tag{18}$$

[11] Данный интервал не может быть пустым (в силу выполнения условия (13) на k – 1-й итерации алгоритма).

здесь за $\gamma_+(s)$ обозначено положительное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left(a^{et\cdot}(k-1,2n-1,s)\right)+\gamma\cdot\mathrm{Re}\left(\Delta a^{et\cdot}(k-1,2n-2,s)\right)=0, \\ \mathrm{Im}\left(a^{et\cdot}(k-1,2n-1,s)\right)+\gamma\cdot\mathrm{Im}\left(\Delta a^{et\cdot}(k-1,2n-2,s)\right)=0, \end{cases} \tag{19}$$

в (19) введено обозначение

$$\Delta a^{et\cdot}(k-1,2n-2,s)=a_0(n,s)\cdot\left(\frac{1}{\Psi}\cdot\sum_{j=1}^{n-1}\psi_j\cdot s^{j-1}\right)-b_0(m,s)\cdot\left(\frac{1}{\Psi}\cdot\sum_{j=n}^{2n-1}\psi_j\cdot s^{j-n}\right),$$

за ψ_j $(j=\overline{1,2n-1})$ обозначены компоненты вектора $\vec{\Psi}$.

Решение переопределенной системы уравнений (19) относительно параметра γ существует только при условии

$$rank\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left(\Delta a^{et\cdot}(k-1,2n-2,s)\right) & -\mathrm{Re}\left(a^{et\cdot}(k-1,2n-1,s)\right) \\ \mathrm{Im}\left(\Delta a^{et\cdot}(k-1,2n-2,s)\right) & -\mathrm{Im}\left(a^{et\cdot}(k-1,2n-1,s)\right) \end{pmatrix}=1, \tag{20}$$

при этом значение γ определяется выражением

$$\gamma(s)=\begin{cases} \dfrac{-\mathrm{Re}\left(a^{et\cdot}(k-1,2n-1,s)\right)}{\mathrm{Re}\left(\Delta a^{et\cdot}(k-1,2n-2,s)\right)}, & \text{если} \quad \mathrm{Re}\left(\Delta a^{et\cdot}(k-1,2n-2,s)\right)\neq 0, \\ \dfrac{-\mathrm{Im}\left(a^{et\cdot}(k-1,2n-1,s)\right)}{\mathrm{Im}\left(\Delta a^{et\cdot}(k-1,2n-2,s)\right)}, & \text{если} \quad \mathrm{Im}\left(\Delta a^{et\cdot}(k,2n-2,s)\right)\neq 0, \end{cases} \tag{21}$$

Если значение (21) отрицательно или такого значения вообще не существует [12], значит, не существует такого положительного значения γ в (16), при котором нули полинома $a^{et\cdot}(k,2n-1,s)$ выходят на границу области $\boldsymbol{S}$ в точке s ($s\in\boldsymbol{\Omega}$). Таким образом, в качестве $\gamma_+(s)$ в выражении (18) можно принять любое сколь угодно большое значение.

Прежде чем перейти ко второму этапу процедуры нахождения γ отметим, что вектор $\vec{\Psi}$ (являющийся решением задачи (15)) соответствует общему направлению возрастания функции $\rho(k-1,s)$ во всех точках s множества $\boldsymbol{\Omega}$ (и, возможно, убывания в других точках границы $\partial\boldsymbol{S}$). Следовательно, в силу непрерывной зависимости функции $\rho_{-}(k)$ от вектора $\vec{R}(k)$ (а значит, и от γ), существуют такие значения γ ($\gamma>0$), при которых функция $\rho_{-}(k)$ возрастает.

Этап 2. Внутри интервала *Г* ищется такой вложенный интервал с закрытыми границами $[0,\gamma]$, что для γ выполняется условие (14). Значение γ может быть найдено одним из методов прямого поиска экстремума функции на заданном интервале *Г*.

Приведенные рассуждения можно рассматривать как нестрогое доказательство изложенного ниже алгоритма.

[12] Это является нарушением условия (20).

Алгоритм итеративного повышения робастности

Для работы алгоритма необходимо задать параметры алгоритма и выполнить следующие предварительные расчеты:

1) задать число N_+, определяющее максимально допустимое число точек минимума функции ρ_- на границе области $\boldsymbol{S}$, и число ε_0, определяющее величину «зазора» при решении задачи (15);

2) в качестве начальной итерации ($k=0$) задать характеристический полином эталона $a^{et.}(2n-1,s)$, удовлетворяющий условию (13), и по классической схеме синтеза модального регулятора рассчитать вектор $\vec{R}(0)$.

Шаг 1. Расчет функций $\rho(k,s)$ и $\rho_-(k)$ по формулам (10), (11). Проверка условия

$$N(k) \le N_+, \tag{22}$$

если данное условие выполнено, переход на шаг 2, в противном случае переход на шаг 9 с формулировкой «превышение допустимого числа точек минимума функции $\rho(k,s)$ на $\partial\boldsymbol{S}$».

Шаг 2. Формирование множеств $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Theta}$ и индексных множеств $\boldsymbol{I}_1$, $\boldsymbol{I}_2$.

Шаг 3. Проверка условия $\boldsymbol{I}_1 = \varnothing$. Если данное условие выполнено – переход на шаг 5, в противном случае переход на шаг 4.

Шаг 4. В качестве $\vec{\Psi}$ выбирается любой ранее не выбиравшийся вектор ортонормированного базиса в $\boldsymbol{R}^{2n-1}$; выбранный вектор (вместе с векторами, выбранными на предыдущих итерациях) запоминаются. В том случае если такой вектор есть, переход на шаг 6; если таких векторов нет, переход на шаг 9 с формулировкой «достигнут локальный максимум функции ρ_-».

Шаг 5. Формируются множества $\boldsymbol{\Theta}^+$, $\boldsymbol{\Theta}^-$ и решается задача (15). В случае если вектор $\vec{\Psi}$, являющийся решением задачи (15), не найден, переход на шаг 6; в противном случае – на шаг 9 с формулировкой «достигнут локальный максимум функции ρ_-».

Шаг 6. Вектор $\vec{R}(k)$ ищется в виде выражения (16). Проверяются условия (17). Если условия (17) не выполнены, переход на шаг 7, в противном случае – переход на шаг 9 с формулировкой «достигнут локальный максимум функции ρ_-».

Шаг 7. По формулам (18) и (19) определяется интервал Γ, внутри которого затем ищется такое значение γ, при котором выполняется условие (14) (методами прямого поиска экстремума функции на заданном интервале). Если искомое значение γ не найдено, переход на шаг 4.

Шаг 8. Принять $k \leftarrow k+1$ и перейти на шаг 1.

Шаг 9. Останов.

Данный алгоритм обеспечивает нахождение такого вектора $\vec{R}$ настроек регулятора (2), при котором функция (10) достигает своего локального максимума (при условии, что ни на одной из итераций алгоритма не нарушается условие (22).

Заключение

В настоящей статье разработан алгоритм вариации настроек модального регулятора (2), последовательно повышающий меру робастности (10) замкнутой системы. Алгоритм не требует точного знания операторов структурных возмущений – достаточно знания функции $\mu(s)$, определенной выражением (11). Данный алгоритм может быть реализован на ЭВМ.

Изложенные результаты можно рассматривать как методику повышения робастных свойств для систем, состоящих из линейного объекта управления, содержащего структурно-параметрическую неопределенность в модели объекта, и модального регулятора.

Список литературы

1. *Кузовков Н. Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.
2. *Соловьев И. Г.* Методы мажоризации в анализе и синтезе адаптивных систем. Новосибирск: Наука, 1992.
3. *Паршуков А. Н.* Критерий робастной устойчивости и качества управления линейной замкнутой системой в условиях структурно-параметрической неопределенности описания в передаточной функции объекта управления // Вестн. НГУ. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15, № 1. С. 59–69.
4. *Ackermann J.* Robust control: systems with uncertain physical parameters. London: Springer, 1993.
5. *Barmish B. R.* New tools for robustness of linear systems. New York: MacMillan, 1994.
6. *Поляк Б. Т.*, *Цыпкин Я. З.* Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // АиТ. 1990. № 9. С. 45–55.
7. *Киселев О. Н.*, *Поляк Б. Т.* Критический коэффициент усиления для последовательности неопределенных звеньев // АиТ. 1995. № 9. С. 93–104.
8. *Поляк Б. Т.*, *Цыпкин Я. З.* Устойчивость и робастная устойчивость однотипных систем // АиТ. 1996. № 11. С. 91–104.
9. *Шарый С. П.* Новые характеризации множества решений для интервальных систем линейных уравнений // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21, № 5. С. 111–118.
10. *Francis B. A.* A course in H^∞ control theory. Lect. Notes Control Inf. Sci., V. 88, Berlin: Springer, 1987.
11. *Doyle J. C.*, *Francis B. A.*, *Tannenbaum A.* Feedback control theory. New York: MacMillan, 1992.
12. *Поляк Б. Т.*, *Цыпкин Я. З.* Робастный критерий Найквиста // АиТ. 1992. № 3. С. 25–31.
13. *Киселев О. Н.*, *Поляк Б. Т.* Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H^∞ и по критерию максимальной робастности // АиТ. 1999. № 3. С. 119–130.
14. *Вапник В. Н.*, *Червоненкис А. Я.* Теория распознавания образов (статистические проблемы обучения). М.: Наука, 1974. 416 с.

Материал поступил в редколлегию 26.01.2018

O. F. Danilov, **A. N. Parshukov**, **I. L. Polyanskaya**

[1] *Tyumen Industrial University*
38 Volodarsky Str., Tyumen, 625000, Russian Federation

[2] *Ural State Transport University (a branch in Tyumen)*
5 Kalinin Str., Tyumen, 625000, Russian Federation

danilov_of@mail.ru, anparshukov@mail.ru, polyanskaya_il@inbox.ru

THE METHOD OF INCREASING OF ROBUSTNESS FOR LINEAR CLOSED-LOOP SYSTEMS WITH STRUCTURAL-PARAMETRIC UNCERTAINTY INTO TRANSFER FUNCTION OF OBJECT CONTROL

The article is established measure of robustness for linear closed-loop systems with indeterminacy of structure and parametric uncertainty into transfer function of object control. Also, in the article presented the algorithm of variation of parameters of a modal controller that increases the robustness for closed-loop system. The results may be realized on computer.

Keywords: robustness, modal controller, indeterminacy of structure, parametric uncertainty.

References

1. Kuzovkov N. T. Modalnoye upravlenie i nablyudayushie ustroistva. Moscow, Mashinostroenie, 1976, 184 p. (In Russ.)

2. Solovev I. G. Metody majorizatchii v analize i sinteze adaptivnyh sistem. Novosibirsk, Nauka, 1992, 188 p. (In Russ.)

3. Parshukov A. N. Kriteriy robastnoy ustoytchivosti i kachestva upravleniya lineinoy zamknutoy sistemoy v usloviyah strukturno-parametricheskoy neopredelennosti opisaniya v peredatochnoy funktchii ob'ekta upravleniya. *Vestnik NGU. Seriya: Informatchionnye tehnologii*, 2017, vol. 15, no. 1, p. 59–69. (In Russ.)

4. Ackermann J. et al. Robust control: systems with uncertain physical parameters. London, Springer, 1993, 413 p.

5. Barmish B. R. New tools for robustness of linear systems. New York, MacMillan, 1994, 394 p.

6. Polyak B. T., Tchipkin Ya. Z. Chastotnye criterii robastnoy ustoichivosti i aperiodichnosti lineinyh sistem. *AiT*, 1990, № 9, p. 45–55. (In Russ.)

7. Kiselev O. N., Polyak B. T. Kriticheskii koeffitchient usileniya dlya posledovatelnosti neopredelennih zven'ev. *AiT*, 1995, № 9, p. 93–104. (In Russ.)

8. Polyak B. T., Tchipkin Ya. Z. Ustoichivost' i robastnaya ustoichivost odnotipnih sistem. *AiT*, 1996, № 11, p. 91–104. (In Russ.)

9. Sharii S. P. Novie harakterizatchii mnozhestva reshenii dlya intervalnih sistem lineinih uravnenyi. *Vichislitel'nye tehnologii*, 2016, vol. 21, no. 5, p. 111–118. (In Russ.)

10. Francis B. A. A course in H^{∞} control theory. *Lect. Notes Control Inf. Sci.*, V. 88, Berlin, Springer, 1987.

11. Doyle J. C., Francis B. A., Tannenbaum A. Feedback control theory. New York, MacMillan, 1992.

12. Polyak B. T., Tchipkin Ya. Z. Robastnyi kriterii Nyquist'a. *AiT*, 1992, № 3, p. 25–31. (In Russ.)

13. Kiselev O. N., Polyak B. T. Sintez regulyatorov nizkogo poryadka po kriteriy H^{∞} i po kriteriy maksimal'noy robastnosti. *AiT*, 1999, № 3, p. 119–130. (In Russ.)

14. Vapnik V. N., Chervonenkis A. Ya. Teoriya raspoznavaniya obrazov (statisticheskie problemy obucheniya). Moscow, Nauka, 1974, 416 p. (In Russ.)

For citation:

Danilov O. F., Parshukov A. N., Polyanskaya I. L. The Method of Increasing of Robustness for Linear Closed-Loop Systems with Structural-Parametric Uncertainty into Transfer Function of Object Control. *Vestnik NSU. Series*: *Information Technologies*, 2018, vol. 16, no. 1, p. 86–99. (In Russ.)