

Научная статья

УДК 519.6

DOI 10.25205/1818-7900-2023-21-1-5-18

## **Моделирование и количественно-качественный анализ двумерных генераторов хаотических сигналов на основе модулярной арифметики**

**Алексей Андреевич Гавришев**

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Москва, Россия

alexxx.2008@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4242-6152>

### *Аннотация*

В данной статье путем совокупного применения программ E&F Chaos, Past, Fractan, EvIEWS Student Version Lite проведено математическое, численное и компьютерное моделирование некоторых из известных двумерных генераторов хаотических сигналов на основе модулярной арифметики, представленных в работе [4], и осуществлена оценка свойств полученных хаотических сигналов с помощью методов нелинейной динамики (временные и спектральные диаграммы, BDS-статистика, показатель Хёрста). В результате проведенных исследований установлено, что полученные для исследуемых двумерных генераторов хаотических сигналов на основе модулярной арифметики временные и спектральные диаграммы имеют сложный шумоподобный вид, схожий с белым шумом. Полученный диапазон значений BDS-статистики на определенном интервале соответствует белому шуму, а на определенном интервале – персистентным процессам (черный шум). Полученный диапазон значений показателя Хёрста так же находится близко к белому шуму. Полученные результаты показывают, что двумерные генераторы хаотических сигналов на основе модулярной арифметики могут относиться к белому шуму и обладать более выраженными свойствами хаотичности, чем классические генераторы хаотических сигналов, на основе которых они получены. Полученные результаты дополняют и расширяют знания о двумерных генераторах хаотических сигналов на основе модулярной арифметики и открывают широкие перспективы по их использованию в различных практических приложениях.

### *Ключевые слова*

моделирование, методы нелинейной динамики, комплекс программ, хаотические сигналы, модулярная арифметика, количественно-качественная оценка

### *Для цитирования*

Гавришев А. А. Моделирование и количественно-качественный анализ двумерных генераторов хаотических сигналов на основе модулярной арифметики // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2023. Т. 21, № 1. С. 5–18. DOI 10.25205/1818-7900-2023-21-1-5-18

© Гавришев А. А., 2023

# Modeling and Quantitative-Qualitative Analysis of Two-Dimensional Generators of Chaotic Signals Based on Modular Arithmetic

Alexey A. Gavrishchev

NRNU MEPhI, Moscow, Russia

alexxx.2008@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4242-6152>

## Annotation

In this article, by the combined application of the programs E&F Chaos, Past, Fractan, EvIEWS Student Version Lite, mathematical, numerical and computer modeling of some of the well-known two-dimensional generators of chaotic signals based on modular arithmetic presented in [4] was carried out, and the properties of the obtained chaotic signals were evaluated using nonlinear dynamics methods (time and spectral diagrams, BDS-statistics, Hurst exponent). As a result of the conducted research, it was found that the time and spectral diagrams obtained for the studied two-dimensional generators of chaotic signal based on modular arithmetic have a complex noise-like appearance similar to white noise. The resulting range of BDS-statistics values corresponds to white noise at a certain interval, and persistent processes (black noise) at a certain interval. The resulting range of values of the Hurst exponent is also close to white noise. The results obtained show that two-dimensional generators of chaotic signals based on modular arithmetic can relate to white noise and have more pronounced chaotic properties than classical generators of chaotic signals, on the basis of which they are created. The results obtained complement and expand the knowledge about two-dimensional generators of chaotic signals based on modular arithmetic and open up broad prospects for their use in various practical applications.

## Keywords

modeling, methods of nonlinear dynamics, software package, chaotic signals, modular arithmetic, quantitative-qualitative assessment

## For citation

Gavrishchev A. A. Modeling and Quantitative-Qualitative Analysis of Two-Dimensional Generators of Chaotic Signals Based on Modular Arithmetic. *Vestnik NSU. Series: Information Technologies*, 2023, vol. 21, no. 1, pp. 5–18. (in Russ.) DOI 10.25205/1818-7900-2023-21-1-5-18

## 1. Введение

Открытие нерегулярных хаотических колебаний в детерминированных нелинейных динамических системах различной природы стало одной из крупнейших научных сенсаций конца XX века. Это явление стали называть детерминированным [1]. В последние годы, благодаря исследованиям теории динамического хаоса с помощью быстродействующих компьютеров, стало ясно, что одно из самых важных свойств динамического хаоса – высокая чувствительность к начальным условиям, приводящая к хаотическому поведению во времени, это типичное свойство многих систем. Такое поведение, например, обнаружено в периодических стимулируемых клетках сердца, в электронных цепях, при возникновении турбулентности в жидкостях и газах и др. [2]. В настоящее время концепция динамического хаоса вышла за рамки породившей ее теории нелинейных колебаний и стала новой общенаучной парадигмой. Она легла в основу нового научного направления, называемого синергией. Более того, явление динамического хаоса дало новые важные инженерные идеи, привело к созданию на их основе устройств и теорий, уже активно используемых на практике [1, 2]. Исходя из этого, исследование особенностей динамического хаоса является актуальной научной и практической задачей.

Одним из активно развивающихся направлений теории динамического хаоса является разработка новых способов и методов генерирования хаотических сигналов и исследование их свойств [1–3]. В настоящее время известно достаточно много генераторов хаотических сигналов (ГХС), как построенных на основе классических, так и совершенно новых [1–3]. Вместе с тем имеются направления исследований, которые не проработаны в полной мере. Например,

к таким направлениям относится генерирование хаотических сигналов с помощью двумерных ГХС на основе модулярной арифметики, описанное в работах [4–6].

Приведем пример описания двумерного ГХС на основе модулярной арифметики. Согласно работе [4], двумерные ГХС на основе модулярной арифметики в общем виде возможно описать с помощью выражения (1):

$$M(x, y) = F(x, y) \bmod N, \quad (1)$$

где  $x$  и  $y$  – это некоторые переменные,  $N$  – целое положительное число, являющееся модулем и  $F(x, y)$  – это двумерный ГХС, описываемый выражением (2) [4]:

$$F(x, y): \begin{cases} x_{n+1} = G(x_n, y_n) \bmod N, \\ y_{n+1} = G(x_n, y_n) \bmod N. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в выражение (1), получим окончательное выражение (3) [4]:

$$M(x, y): \begin{cases} x_{n+1} = G(x_n, y_n) \bmod N, \\ y_{n+1} = G(x_n, y_n) \bmod N. \end{cases} \quad (3)$$

С помощью выражений (1) – (3) авторами работы [4], на основе классических двумерных ГХС (Henon Map, Zeraoulia-Sprott Map, Duffing Map), предложены усовершенствованные ГХС (Improved Henon Map, Improved Zeraoulia-Sprott Map, Improved Duffing Map), описываемые выражениями (4) – (6):

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - ax_n^2 + y_n) \bmod N, \\ y_{n+1} = bx_n \bmod N. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - ax_n^2 + y_n) \bmod N, \\ y_{n+1} = bx_n \bmod N. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - ax_n^2 + y_n) \bmod N, \\ y_{n+1} = bx_n \bmod N. \end{cases} \quad (6)$$

Также авторами указанной работы [4] проведены исследования свойств сигналов, получаемых с помощью генераторов, описываемых выражениями (4) – (6). В результате проведенных исследований было установлено, что двумерные ГХС на основе модулярной арифметики обладают следующими свойствами, отличающими их от исходных ГХС [4]:

- значительно большими значениями максимального положительного показателя Ляпунова, энтропии и корреляционной размерности;
- более сложными фазовыми портретами;
- значительно большим диапазоном значений, в которых генерируются хаотические сигналы.

Таким образом, двумерные ГХС на основе модулярной арифметики потенциально обладают более выраженными свойствами хаотичности, чем исходные ГХС. Указанные обстоятельства открывают широкие перспективы по их использованию в различных практических приложениях, в частности, в образовательной деятельности, в системах имитационного моделирования, в системах защиты от несанкционированного доступа информации и др. Исходя из этого, требуются дополнительные исследования ГХС указанного класса.

Целью данной статьи является дополнение и расширение знаний о двумерных генераторах хаотических сигналов на основе модулярной арифметики.

Задачей данной статьи является моделирование двумерных генераторов хаотических сигналов на основе модулярной арифметики и оценка свойств получаемых хаотических сигналов с помощью методов нелинейной динамики.

## 2. Основная часть

### 2.1. Общий алгоритм осуществляемого в работе математического, численного и компьютерного моделирования, проведенного путем совокупного применения программ

Из литературы известно [7, 8], что в настоящее время перспективным подходом к всестороннему исследованию различных процессов, объектов и явлений выступает использование методов и алгоритмов математического, численного и компьютерного моделирования, которые могут быть успешно реализованы путем совокупного применения различных пакетов программ. В настоящей работе для моделирования двумерных ГХС на основе модулярной арифметики и оценки свойств получаемых хаотических сигналов с помощью методов нелинейной

динамики используются следующие известные программы: E&F Chaos, Past, Fractan, EvIEWS Student Version Lite.

Для удобства процесса моделирования двумерных ГХС на основе модулярной арифметики и оценки свойств получаемых хаотических сигналов с помощью методов нелинейной динамики изобразим используемый в работе комплекс программ в виде блок-схемы. Известно [7, 8], что блок-схемы являются удобным средством изображения различных алгоритмов и получили широкое распространение в научной литературе.

На рис. 1, по аналогии с работами [7, 8], изображена упрощенная блок-схема, описывающая алгоритм осуществляемого в работе математического, численного и компьютерного моделирования, проведенного путем совокупного применения программ E&F Chaos, Past, Fractan, EvIEWS Student Version Lite. Как видно из упрощенной блок-схемы, представленной на рис. 1, в качестве входных параметров выступают модели двумерных ГХС на основе модулярной арифметики, например, описываемые выражениями (4) – (6). Далее с помощью программы E&F Chaos осуществляется моделирование и выработка различных временных реализаций моделей двумерных ГХС на основе модулярной арифметики. После этого с помощью программ Past, Fractan, EvIEWS Student Version Lite производится количественно-качественная оценка свойств полученных временных реализаций моделей двумерных ГХС на основе модулярной арифметики. Затем

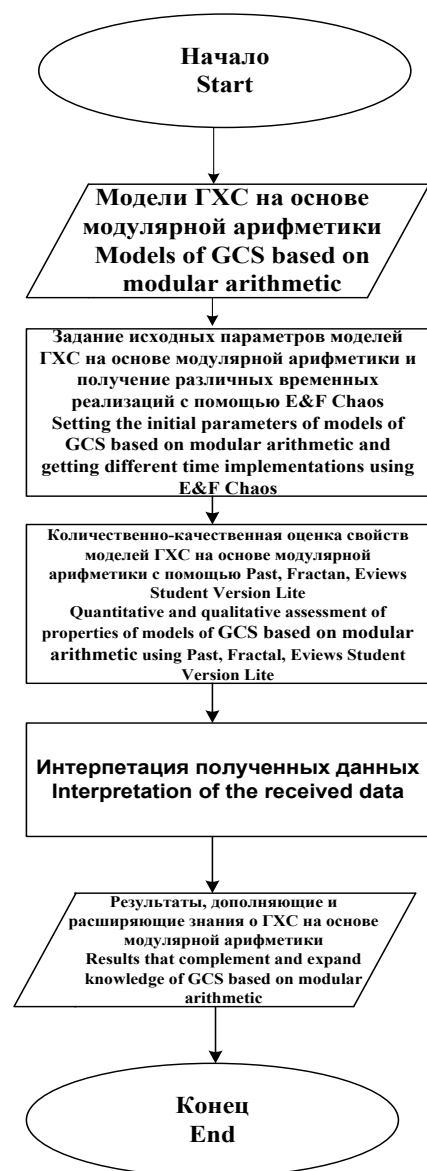


Рис. 1. Блок-схема алгоритма осуществляемого в работе математического, численного и компьютерного моделирования, проведенного путем совокупного применения программ E&F Chaos, Past, Fractan, EvIEWS Student Version Lite

Fig. 1. Flowchart of the algorithm of mathematical, numerical and computer modeling carried out in the work, carried out by the combined application of the programs E&F Chaos, Past, Fractan, EvIEWS Student Version Lite

осуществляется интерпретация полученных данных. Выходными параметрами являются полученные результаты, дополняющие и расширяющие знания о двумерных ГХС на основе модулярной арифметики.

## 2.2. Обзор некоторых из известных методов нелинейной динамики

Для количественно-качественной оценки свойств временных реализаций, полученных с помощью двумерных ГХС на основе модулярной арифметики, согласно рис. 1, рассмотрим широко распространенные методы нелинейной динамики.

Кратко опишем следующие качественные показатели на основе нелинейной динамики: временные и спектральные диаграммы. Известно [1–3, 9, 10], что произвольный сигнал естественно рассматривать как результат некоторых измерений. Поэтому сигналами чаще всего являются величины, изменяющиеся во времени. Временное представление сигнала в виде функции  $s(t)$  или временной диаграммы – это один из самых распространенных способов его описания и исследования. Спектральные диаграммы также являются одним из самых распространенных способов описания и исследования произвольных сигналов. Так, энергетический спектр показывает распределение энергии сигнала по частотам и может быть вычислен, в простейшем случае, с помощью преобразования Фурье [1–3, 10]:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (7)$$

Далее кратко опишем следующие количественные показатели на основе нелинейной динамики, которые не использовались в работе [4] для анализа свойств сигналов, сгенерированных с помощью двумерных ГХС на основе модулярной арифметики: BDS-статистика и показатель Хёрста.

Так, известно [11–13], что BDS-статистика  $\bar{w}(\varepsilon)$  базируется на статистических свойствах корреляционной размерности исследуемого процесса в фазовом пространстве, которая в свою очередь определяется корреляционным интегралом. Эти данные дают больше информации о классе процесса (случайные, хаотические, регулярные), чем энергетические показатели. BDS-статистика основана на статистической величине  $\bar{w}(\varepsilon)$  [11–13]:

$$w_{m,N}(\varepsilon) = \sqrt{N-m+1} \frac{C_{m,N}(\varepsilon) - C_{1,N-m}(\varepsilon)^m}{\sigma_{m,N}(\varepsilon)}, \quad (8)$$

где  $C_{m,N}(\varepsilon)$  и  $C_{1,N-m}(\varepsilon)$  – корреляционные интегралы, а  $\sigma_{m,N}(\varepsilon)$  – среднеквадратическое отклонение.

Задача анализа передаваемого сигнала рассматривается как непараметрическая проверка одной из гипотез:  $H_0$  – наблюдаемые данные  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  независимы и одинаково распределены (белый шум) и  $H_1$  – данные не относятся к белому шуму, что возможно в случае, когда они являются смесью шума и сигнала. В качестве теста на достоверность гипотезы  $H_0$  об отсутствии в наблюдении хаотического процесса принимается выполнение неравенства  $w_{m,N}(\varepsilon) \leq |1,96|$ , для значения статистики  $w_{m,N}(\varepsilon)$ , что соответствует уровню значимости  $\alpha = 0,05$ , тогда с 95 % вероятностью можно принять гипотезу  $H_0$  (белый шум). Критическая область уровня  $\alpha = 0,05$  состоит из двух бесконечных полуинтервалов  $(-\infty, -1,96]$  и  $[1,96, \infty)$ . В отсутствие шумов наблюдения применение критерия значимости к статистике  $w_{m,N}(\varepsilon)$  позволяет эффективно решать задачу по классификации наблюдения ( $w_{m,N}(\varepsilon) \leq |1,96|$ ) [11–13].

Как известно [9, 13–15], показатель Хёрста  $H$  позволяет разделить между собой периодические и случайные процессы. Показатель Хёрста  $H$  описывается выражением, представленным формулой (1) [9, 13–15]:

$$R/S = (\tau/2)^H, \quad (9)$$

где  $R$  – нормированный размах вариации (разность максимального и минимального значений измеряемого параметра),  $S$  – стандартное отклонение (корень квадратный от дисперсии),  $\tau$  – период (длина ряда) наблюдений.

В соответствии с [9, 13–15], значения показателя Хёрста  $0 < H < 0,50$  типичны для так называемых «антиперсистентных процессов» (эргодические ряды), значения  $0,50 < H < 1$  характерны для систем, в которых имеется та или иная форма упорядоченности, а значение  $H \approx 0,50$  соответствует понятию белого шума.

### 2.3. Применение комплекса программ для моделирования и анализа модели двумерного ГХС на основе модулярной арифметики, описываемого выражением (4)

Основываясь на алгоритме, приведенном на рис. 1, проведем моделирование двумерного ГХС на основе модулярной арифметики и оценку полученных хаотических сигналов. В качестве двумерного ГХС на основе модулярной арифметики выберем Improved Henon Map, описываемый выражением (4). Моделирование проведем с помощью программы E&F Chaos [16]. Для двумерного ГХС на основе модулярной арифметики, описываемого выражением (4), в соответствии с работой [4], рассмотрим следующие случаи:

- 1)  $a=6$  и  $b \in [6 \div 105]$ ;
- 2)  $b=6$  и  $a \in [6 \div 105]$ ;
- 3)  $a \in [6 \div 105]$  и  $b \in [6 \div 105]$ .

Рассмотрим первый случай, когда  $a=6$  и  $b \in [6 \div 105]$ . В соответствии с указанными значениями параметров, при изменении значения переменной  $b$  в диапазоне примерно от 6 до 105 с шагом 1 были получены различные временные реализации. Длина каждой из реализаций – 2000. В частности, на рис. 2 представлен пример временной диаграммы, полученной с помощью программы PAST [9, 17]. Другие полученные временные диаграммы имеют схожий вид.

Соответствующая рис. 2 спектральная диаграмма представлена на рис. 3. Спектральные диаграммы получены с помощью программы PAST [9, 17]. Другие полученные спектральные диаграммы имеют схожий вид.

Анализ полученных качественных показателей, представленных на рис. 2, 3, проведен в разделе 2.4.

Далее проведем расчеты BDS-статистики, согласно формуле (8), и показателя Хёрста, согласно формуле (9), для полученных данных (табл. 1). Расчеты BDS-статистики авторами проведены в программе Eviews Student Version Lite [18]. Расчеты показателя Хёрста авторами проведены в программе Fractan [9, 19].

Таблица 1

Расчеты для модели, описываемой выражением (4),  
для первого рассматриваемого случая

Table 1

Calculations for a Model Described by the Expression (4)  
for the First Case Under Consideration

| Название показателя<br>Indicator name | Значение показателя<br>The value of the indicator |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------|
| BDS-статистика<br>BDS-statistic       | 0,70÷3,80                                         |
| Показатель Хёрста<br>Hurst exponent   | 0,40÷0,55                                         |

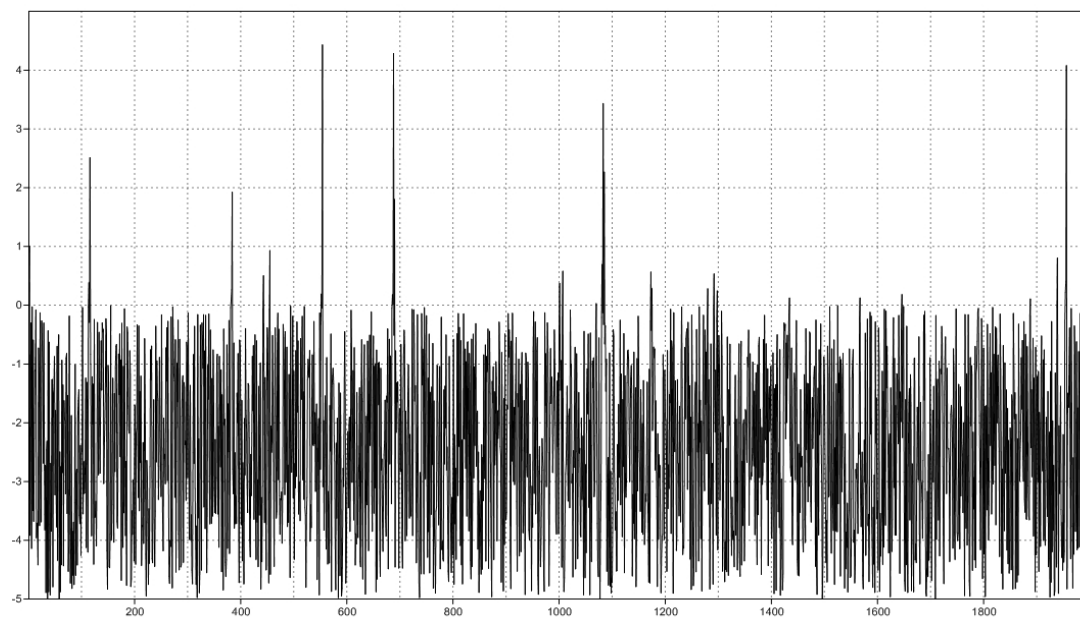


Рис. 2. Пример временной диаграммы для модели, представленной выражением (4),  
для первого рассматриваемого случая

Fig. 2. Example of a time diagram for a model represented by the expression (4)  
for the first case under consideration

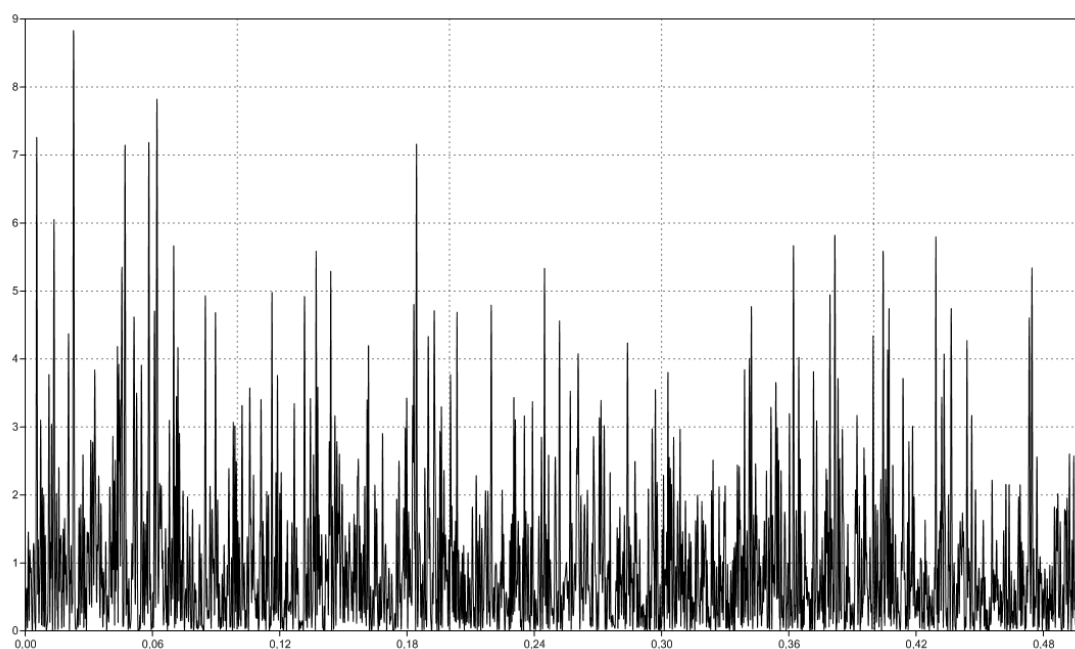


Рис. 3. Пример спектральной диаграммы для модели, представленной выражением (4),  
для первого рассматриваемого случая

Fig. 3. Example of a spectral diagram for a model represented by the expression (4)  
for the first case under consideration

Анализ полученных количественных показателей, представленных в табл. 3, проведен в разделе 2.4.

Рассмотрим второй случай, когда  $b=6$  и  $a \in [6 \div 105]$ . В соответствии с указанными значениями параметров при изменении значения переменной  $a$  в диапазоне примерно от 6 до 105 с шагом 1 были получены различные временные реализации. Длина каждой из реализаций – 2000. В частности, на рис. 4 представлен пример временной диаграммы, полученной с помощью программы PAST [9, 17]. Другие полученные временные диаграммы имеют схожий вид.

Соответствующая рис. 4 спектральная диаграмма представлена на рис. 5. Спектральные диаграммы получены с помощью программы PAST [9, 17]. Другие полученные спектральные диаграммы имеют схожий вид.

Анализ полученных качественных показателей, представленных на рис. 4, 5, проведен в разделе 2.4.

Далее проведем расчеты BDS-статистики, согласно формуле (8), и показателя Хёрста, согласно формуле (9), для полученных данных (таб. 2). Расчеты BDS-статистики авторами проведены в программе Eviews Student Version Lite [18]. Расчеты показателя Хёрста авторами проведены в программе Fractan [9, 19].

Таблица 2

Расчеты для модели, описываемой выражением (4),  
для второго рассматриваемого случая

Table 2

Calculations for a Model Described by the Expression (4)  
for the Second Case Under Consideration

| Название показателя<br>Indicator name | Значение показателя<br>The value of the indicator |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------|
| BDS-статистика<br>BDS-statistic       | 0,30÷4,60                                         |
| Показатель Хёрста<br>Hurst exponent   | 0,45÷0,65                                         |

Анализ полученных количественных показателей, представленных в табл. 2, проведен в разделе 2.4.

Рассмотрим третий случай, когда  $a \in [6 \div 105]$  и  $b \in [6 \div 105]$ . В соответствии с указанными значениями параметров, при изменении значений переменных  $a$  и  $b$  в диапазоне примерно от 6 до 105 с шагом 1 были получены различные временные реализации. В частности, на рис. 6 представлен пример временной диаграммы, полученной с помощью программы PAST [9, 17]. Другие полученные временные диаграммы имеют схожий вид.

Соответствующая рис. 6 спектральная диаграмма представлена на рис. 7. Спектральные диаграммы получены с помощью программы PAST [9, 17]. Другие полученные спектральные диаграммы имеют схожий вид.

Анализ полученных качественных показателей, представленных на рис. 6, 7, проведен в разделе 2.4.

Далее проведем расчеты BDS-статистики, согласно формуле (8), и показателя Хёрста, согласно формуле (9), для полученных данных (табл. 3). Расчеты BDS-статистики авторами проведены в программе Eviews Student Version Lite [18]. Расчеты показателя Хёрста авторами проведены в программе Fractan [9, 19].

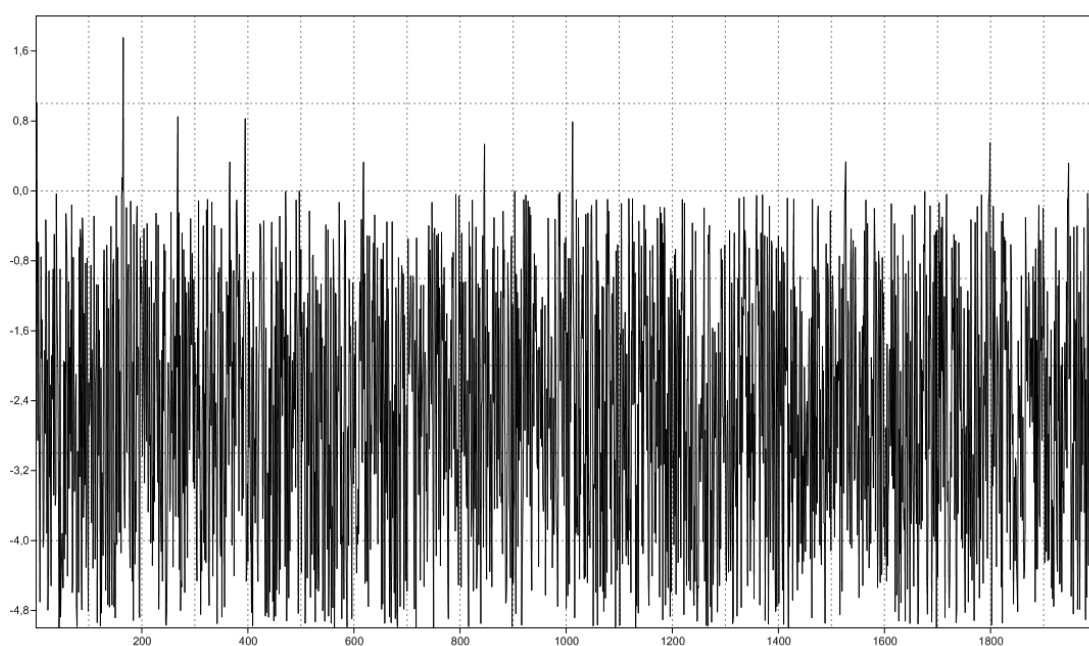


Рис. 4. Пример временной диаграммы для модели, представленной выражением (4),  
для второго рассматриваемого случая

Fig. 4. Example of a time diagram for a model represented by the expression (4)  
for the second case under consideration

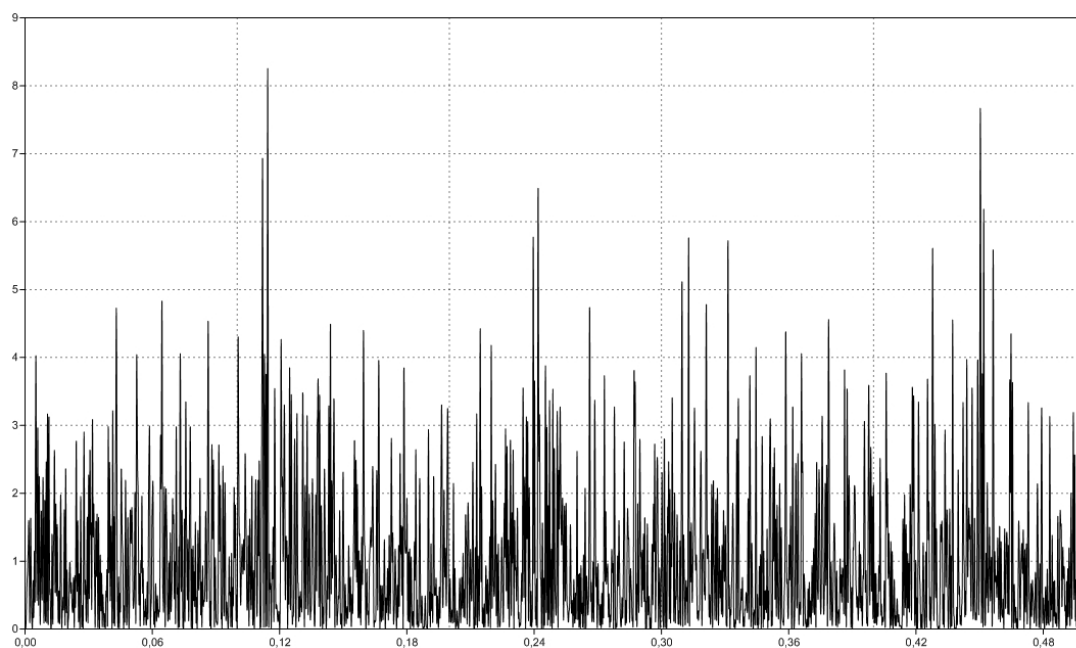


Рис. 5. Пример спектральной диаграммы для модели, представленной выражением (4),  
для второго рассматриваемого случая

Fig. 5. Example of a spectral diagram for a model represented by the expression (4)  
for the second case under consideration

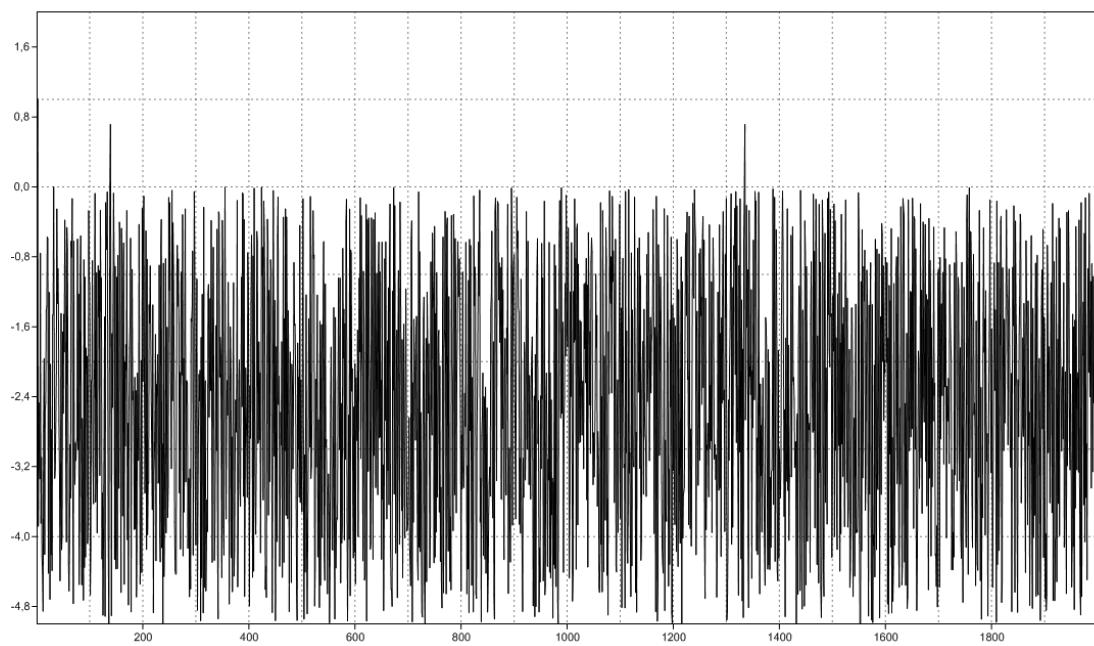


Рис. 6. Пример временной диаграммы для модели, представленной выражением (4),  
для третьего рассматриваемого случая

Fig. 6. Example of a time diagram for a model represented by the expression (4)  
for the third case under consideration

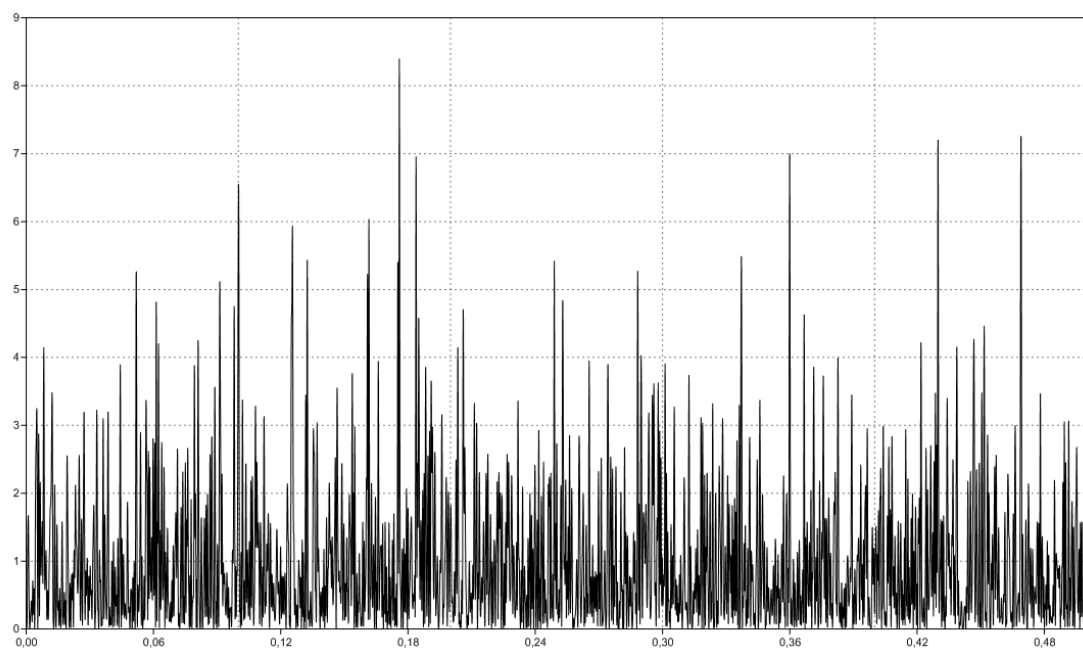


Рис. 7. Пример спектральной диаграммы для модели, представленной выражением (4),  
для третьего рассматриваемого случая

Fig. 7. Example of a spectral diagram for a model represented by the expression (4)  
for the third case under consideration

Таблица 3

Расчеты для модели, описываемой выражением (4),  
для третьего рассматриваемого случая

Table 3

Calculations for a Model Described by the Expression (4)  
for the Third Case Under Consideration

| Название показателя<br>Indicator name | Значение показателя<br>The value of the indicator |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------|
| BDS-статистика<br>BDS-statistic       | 0,50÷3,00                                         |
| Показатель Хёрста<br>Hurst exponent   | 0,42÷0,62                                         |

Анализ полученных количественных показателей, представленных в табл. 3, проведен в разделе 2.4.

#### 2.4. Интерпретация полученных данных для исследуемых двумерных ГХС на основе модулярной арифметики

Далее, основываясь на алгоритме, приведенном на рис. 1, осуществим интерпретацию полученных данных для двумерного ГХС на основе модулярной арифметики, описываемого выражением (4).

На основе работ [1–3] проведем интерпретацию полученных качественных показателей. Полученные временные диаграммы, представленные на рис. 2, 4, 6, имеют сложный шумоподобный вид и являются непрерывными во временной области. Это указывает на то, что исследуемые сигналы могут обладать свойствами хаотичности. Полученные спектральные диаграммы, представленные на рис. 3, 5, 7, имеют сложный шумоподобный вид, схожий с белым шумом. Это указывает на то, что исследуемые сигналы могут обладать свойствами хаотичности.

На основе работ [9, 13–15, 19] проведем интерпретацию полученных количественных показателей, представленных в табл. 1–3. Согласно работам [13–15], полученный для двумерного ГХС на основе модулярной арифметики, описываемого выражением (4), диапазон значений BDS-статистики  $\bar{w}(\varepsilon) \in [0,30 \div 4,60]$ , на определенном интервале соответствует белому шуму ( $w_{m,N}(\varepsilon) \leq |1,96|$ ), а на определенном интервале – персистентным процессам (черный шум) ( $\bar{w}(\varepsilon) \in [1,70 \div 5,00]$ ). Таким образом, полученные временные реализации двумерного ГХС на основе модулярной арифметики находятся достаточно близко к границе диапазона, определяющего белый шум, по сравнению с исходным ГХС Henon Map [20], диапазон значений BDS-статистики которого равен  $\bar{w}(\varepsilon) \in [21,90 \div 45,00]$ .

Согласно работам [9, 15, 19], полученный для двумерного ГХС на основе модулярной арифметики, описываемого выражением (4), диапазон значений показателя Хёрста  $H \in [0,40 \div 0,65]$  также находится близко к белому шуму ( $H \approx 0,50$ ) и совпадает с исходным ГХС Henon Map [20], диапазон значений показателя Хёрста которого равен  $H \in [0,46 \div 0,52]$ .

Таким образом, временные и спектральные диаграммы, BDS-статистика и показатель Хёрста показывают, что двумерный ГХС на основе модулярной арифметики, представленный выражением (4), может относиться к белому шуму и обладает более выраженными свойствами хаотичности, чем исходный ГХС, на основе которого он получен. Полученный результат в целом совпадает с результатами из работы [4].

### Заключение

Таким образом, в данной статье на основе осуществленного математического, численного и компьютерного моделирования, проведенного путем совокупного применения программ E&F Chaos, Past, Fractan, Eviews Student Version Lite, установлено, что:

- 1) полученные временные и спектральные диаграммы двумерного ГХС на основе модулярной арифметики, описываемого выражением (4), имеют сложный шумоподобный вид, схожий с белым шумом;
- 2) полученный для двумерного ГХС на основе модулярной арифметики, описываемого выражением (4), диапазон значений BDS-статистики  $\bar{w}(\epsilon) \in [0,30 \div 4,60]$  на определенном интервале соответствует белому шуму ( $w_{m,N}(\epsilon) \leq |1,96|$ ), а на определенном интервале – персистентным процессам (черный шум) ( $\bar{w}(\epsilon) \in [1,70 \div 5,00]$ );
- 3) полученный для двумерного ГХС на основе модулярной арифметики, описываемого выражением (4), диапазон значений показателя Хёрста  $H \in [0,40 \div 0,65]$  также находится близко к белому шуму ( $H \approx 0,50$ );
- 4) полученные результаты показывают, что двумерные ГХС на основе модулярной арифметики могут относиться к белому шуму и обладать более выраженными свойствами хаотичности, чем классические ГХС, на основе которых они созданы. Полученный результат в целом совпадает с результатами из известных работ;
- 5) полученные результаты дополняют и расширяют знания о двумерных ГХС на основе модулярной арифметики и открывают широкие перспективы по их использованию в различных практических приложениях.

### Список литературы

1. **Шахтарин Б. И. и др.** Генераторы хаотических колебаний. М.: Горячая линия – Телеком, 2014. 248 с.
2. **Шустер Г.** Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир. 1988. 240 с.
3. **Kehui Sun** Chaotic Secure Communication: Principles and Technologies. Tsinghua University Press and Walter de Gruyter GmbH. 2016. 333 p.
4. **Zhongyun Hua, Yinxing Zhang, Yicong Zhou** Two-Dimensional Modular Chaotification System for Improving Chaos Complexity // IEEE Transactions on signal processing. 2020. V. 68. Pp. 1937-1948. DOI: 10.1109/TSP.2020.2979596.
5. **Moysis L., Kafetzis I., Baptista M.S., Volos C.** Chaotification of One-Dimensional Maps Based on Remainder Operator Addition // Mathematics. 2022. No. 10. Pp. 2801. DOI: 10.3390/math10152801.
6. **Hua Zhong Yun, Zhou Bing Hang, Zhang Yin Xing, Zhou Yi Cong** Modular chaotification model with FPGA implementation // Science China. 2021 V. 64 No. 7. Pp. 1472–1484. DOI: 10.1007/s11431-020-1717-1.
7. **Нарожнов В. В.** Моделирование нелинейного осциллятора при наличии упругих соударений: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18. Нальчик, 2018. 134 с.
8. **Гавришев А. А.** Применение методов нелинейной динамики для количественно-качественной оценки свойств 2D-моделей S-хаоса // Прикладная информатика. 2021. Т. 16. № 1 (91). С. 125-143. DOI: 10.37791/2687-0649-2021-16-1-125-143.
9. **Гавришев А. А., Жук А. П.** Применение методов нелинейной динамики для исследования хаотичности сигналов-переносчиков защищенных систем связи на основе динамического хаоса // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2018. Т. 16. № 1. С. 50–60. DOI: 10.25205/1818-7900-2018-16-1-50-60.
10. **Каратаева Н. А.** Радиотехнические цепи и сигналы. Ч. 1. Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2012. 260 с.

11. **Васюта К. С.** Классификация процессов в инфокоммуникационных радиотехнических системах с применением BDS-статистики // Проблемы телекоммуникаций. 2012. № 4. С. 63–71.
12. **Васюта К. С.** Новый подход к оценке параметров хаотических сигналов, наблюдаемых на фоне шума, с использованием «нелинейной динамической статистики» // Проблемы телекоммуникаций. 2010. № 1. С. 109–114.
13. **Гавришев А. А.** Моделирование и количественно-качественный анализ распространенных защищенных систем связи // Прикладная информатика. 2018. Т. 13. № 5 (77). С. 84–122.
14. **Карманов А. П., Кочева Л. С., Щемелинина Т. Н.** Применение методов нелинейной динамики для анализа результатов мониторинга сточных вод // Известия высших учебных заведений. Лесной журнал. 2014. № 6. С. 129–137.
15. **Петрунина Т. С.** Численный анализ структурных свойств хаотических временных рядов // Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ». Темат. вып.: Системный анализ, управление и информационные технологии. 2011. № 32. С. 71–75.
16. **Diks C., Hommes C., Panchenko V. et al.** E&F Chaos: A User Friendly Software Package for Nonlinear Economic Dynamics // Comput Econ. 2008. No. 32. Pp. 221–244 DOI: 10.1007/s10614-008-9130-x.
17. **Hammer O., Harper D. A. T.** Paleontological Data Analysis. Blackwell Publ., 2006. 370 p.
18. **Гавришев А. А., Жук А. П.** Применение программы EViews для анализа защищенных систем связи на основе хаотических сигналов на основе BDS-статистики // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2018. Т. 12. № 11. С. 43–50. DOI 10.24411/2072-8735-2018-10175.
19. **Kovalenko A. N.** Fractal characterization of nanostructured materials // Nanosystems: physics, chemistry, mathematics. 2019. No. 10 (1). Pp. 42–49. DOI: 10.17586/2220-8054-2019-10-1-42-49.
20. **Гавришев А. А., Осипов Д. Л.** Развитие использования методов нелинейной динамики для обнаружения радиосигналов с псевдослучайной перестройкой рабочей частоты, используемых в каналах связи беспилотных летательных аппаратов // Сибирский пожарно-спасательный вестник. 2021. № 4(23). С. 92–96. DOI: 10.34987/vestnik.sibpsa.2021.71.49.011.

## References

1. **Shahtarin B. I. et al.** Generators of chaotic oscillations: a tutorial. Moscow. Goryachaya liniya-Telekom Publ. 2014. 248 p.
2. **Shuster G.** [Deterministic chaos: Introduction]. Moscow. Mir Publ. 1988. 240 p.
3. **Sun K.** Chaotic Secure Communication: Principles and Technologies. Tsinghua University Press and Walter de Gruyter GmbH, 2016. 333 p.
4. **Hua Z., Zhang Y., Zhou Y.** Two-Dimensional Modular Chaotification System for Improving Chaos Complexity // IEEE Transactions on signal processing. 2020. Vol. 68. Pp. 1937–1948. DOI 10.1109/TSP.2020.2979596
5. **Moysis L., Kafetzis I., Baptista M. S., Volos C.** Chaotification of One-Dimensional Maps Based on Remainder Operator Addition. Mathematics. 2022. No. 10. P. 2801. DOI 10.3390/math10152801
6. **Hua Z. Y., Zhou B. H., Zhang Y. X., Zhou Y.** Cong Modular chaotification model with FPGA implementation. Science China. 2021. Vol. 64, no. 7. Pp. 1472–1484. DOI 10.1007/s11431-020-1717-1
7. **Narozhnov V. V.** Modeling of a nonlinear oscillator in the presence of elastic collisions]: dis. ... cand. tech. sciences. Nal'chik, 2018, 134 p.
8. **Gavrishev A.** Application of nonlinear dynamics methods for quantitative and qualitative evaluation of properties of 2D models of S-chaos // Journal of Applied Informatics. 2021. Vol. 16, no.1. Pp.125–143. (in Russ.) DOI 10.37791/2687-0649-2021-16-1-125-143

9. **Gavrishev A. A., Zhuk A. P.** Application of Methods of Nonlinear Dynamics to Study the Chaotic State of the Carrier Signals of Secure Communication Systems Based on Dynamic Chaos. Vestnik NSU. Series: Information Technologies. 2018. Vol. 16, no. 1. Pp. 50–60. (in Russ.) DOI 10.25205/1818-7900-2018-16-1-50-60
10. **Karataeva N.A.** Radio engineering circuits and signals. P. 1. Tomsk: Tomsk interuniversity center for distance education Publ., 2012. 260 p.
11. **Vasyuta C. S.** Classification of process in infocommunication radiotechnic systems using BDS-statistics. Problemy telekomunikatsiy. 2012. No. 4. Pp. 63–71. (in Russ.)
12. **Vasyuta C. S.** A new approach to estimation of the parameters of chaotic signals observed on the background noise, using the “nonlinear dynamic statistics”. Problemy telekomunikatsiy. 2010. No. 1. Pp. 109–114 (in Russ.)
13. **Gavrishev A. A.** Modeling and quantitative and qualitative analysis of common secure communication systems. Journal of Applied Informatics. 2018. Vol. 13, no. 5. Pp. 84–122. (in Russ.)
14. **Karmanov A. P., Kocheva L. S., Shchemelinina T. N.** Application of Non-Linear Dynamics Methods for Analysis of Results of Industrial Wastewater. Forestry journal. 2014. No. 6. Pp. 129–137. (in Russ.)
15. **Petrulina T. S.** Numerical analysis of the structural properties of the chaotic time series. Vestnik Nats. tekhn. unta «KhPI». Temat. vyp.: Sistemnyy analiz, upravlenie i informatsionnye tekhnologii – Bulletin of NTU “KhPI”. The themed slots. vol.: System analysis, management and information technology. 2011. No. 32. Pp. 71–75.
16. **Diks C., Hommes C., Panchenko V. et al.** E&F Chaos: A User Friendly Software Package for Nonlinear Economic Dynamics. Comput. Econ. 2008. No. 32. Pp. 221–244. DOI 10.1007/s10614-008-9130-x
17. **Hammer O., Harper D. A. T.** Paleontological Data Analysis. Blackwell Publ., 2006. 370 p.
18. **Gavrishev A. A., Zhuk A. P.** Application of the Eviews program for the analysis of secure communication systems based on chaotic signals based on BDS-statistics. T-Comm. 2018. Vol. 12, no.11. Pp. 43–50. (in Russ.) DOI 10.24411/2072-8735-2018-10175
19. **Kovalenko A. N.** Fractal characterization of nanostructured materials. Nanosystems: physics, chemistry, mathematics. 2019. No. 10(1). Pp. 42–49. DOI 10.17586/2220-8054-2019-10-1-42-49
20. **Gavrishev A. A., Osipov D. L.** Application of nonlinear dynamics methods for detecting radio signals with frequency-hopping spread spectrum used in communication channels of unmanned aerial vehicles. Siberian Fire and Rescue Bulletin. 2021. No. 4(23). Pp. 92–96. (in Russ.) DOI 10.34987/vestnik.sibpsa.2021.71.49.011

#### Сведения об авторах

**Гавришев Алексей Андреевич**, магистрант, Институт интеллектуальных и кибернетических систем, НИЯУ «МИФИ», (Москва, Россия)

#### Information about the Authors

**Aleksey A. Gavrishev**, Master’s Student, Institute of Intelligent and Cybernetic Systems, NRNU MEPhI (Moscow, Russia)

*Статья поступила в редакцию 17.01.2023;  
одобрена после рецензирования 20.03.2023; принята к публикации 20.03.2023  
The article was submitted 17.01.2023;  
approved after reviewing 20.03.2023; accepted for publication 20.03.2023*