Обзорная статья

УДК 539.3
DOI 10.25205/1818-7900-2021-19-4-67-84

Развитие САПР для решения задач механики с использованием МКЭ

Аркадий Николаевич Соловьев [1]
Ростислав Викторович Киричевский [2]

[1] Донской государственный технический университет
Ростов-на-Дону, Россия

[2] Луганский государственный университет имени Владимира Даля
Луганск, Украина

[1] solovievarc@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-8465-5554
[2] rost71@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-4557-8469

Аннотация

Представленный обзор существующих отечественных и зарубежных систем автоматизированного проектирования (САПР) показал, что применение в их структуре метода конечных элементов (МКЭ) остается вполне актуальным перед другими методами в скорости вычислений, достаточной точности и программной реализации в структуре САПР. Для решения задач механики эластомеров и композитов на их основе более полно представлен обзор разработанного отечественного программного комплекса МИРЕЛА+. Этот комплекс решает многие задачи механики деформации твердого тела: имеет специальную направленность на решение задач диссипативного разогрева, параметров механики разрушения массивных эластомерных элементов конструкций и тонкослойных резинометаллических элементов с трещинами с изменяющимися физико-механическими и теплофизическими параметрами в условиях циклического деформирования. Не многие из отечественных программ смогут это реализовать, а лицензии зарубежных программ стоят десятки тысяч долларов.

В работе также приведены способы дискретизации конечными элементами и алгоритм построения системы разрешающих уравнений, используемый в МИРЕЛА+, выражения для определения компонентов тензора преобразования координат, тензора деформаций в центрах КЭ в декартовой системе координат. Приведены примеры визуального представления в трехмерном изображении с помощью цветной картины, где каждому оттенку или цвету соответствует определенный диапазон числовых значений функции.

Ключевые слова

метод конечных элементов, программный комплекс, САПР, напряженно-деформированное состояние

Для цитирования

Соловьев А. Н., Киричевский Р. В. Развитие САПР для решения задач механики с использованием МКЭ // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2021. Т. 19, № 4. С. 67–84. DOI 10.25205/1818-7900-2021-19-4-67-84

© Соловьев А. Н., Киричевский Р. В., 2021

Development of a Finite Element Method and Its Application in a CAD

Arkady N. Soloviev [1], **Rostislav V. Kirichevsky** [2]

[1] Don State Technical University
Rostov on Don, Russian Federation

[2] V. Dahl Lugansk State University
Lugansk, Ukrain

[1] solovievarc@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-8465-5554
[2] rost71@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-4557-8469

Abstract

The presented review of existing domestic and foreign CAD systems showed that the use of FEM in their structure remains quite relevant before other methods in the speed of calculations, sufficient accuracy and software implementation in the CAD structure. To solve the problems of mechanics of elastomers and composites based on them, an overview of the developed domestic software MIRELA+ is presented in more detail. This complex solves many problems of solid mechanics: it has a special focus on solving problems of dissipative heating, parameters of fracture mechanics of massive elastomeric structural elements and thin-layer rubber-metal elements with cracks with changing physical, mechanical and thermophysical parameters under cyclic deformation. Not many of the domestic programs can implement this, and licenses for foreign programs cost tens of thousands of dollars.

This paper also presents methods of discretization by finite elements and an algorithm for constructing a system of resolving equations used in MIRELA+, expressions for determining the components of the coordinate transformation tensor, the strain tensor at the FE centers in a Cartesian coordinate system. Examples of visual representation in a three-dimensional image using a color picture are given, where each shade or color corresponds to a certain range of numerical values of the corresponding function.

Keywords

finite element method, program complex, CAD, CAE, stress-strain state

For citation

Solovev A. N., Kirichevsky R. V. Development of a Finite Element Method and Its Application in a CAD. *Vestnik NSU. Series: Information Technologies*, 2021, vol. 19, no. 4, p. 67–84. (in Russ.) DOI 10.25205/1818-7900-2021-19-4-67-84

Введение

Одним из наиболее важных аспектов автоматизации проектирования является замена дорогостоящего и длительного экспериментального исследования опытного образца численным экспериментом, суть которого состоит в построении и исследовании с помощью компьютера математической модели проектируемого объекта. Кроме того, на практике не всегда имеется возможность испытаний опытных образцов, например, в авиастроении, так как это может привести к весьма серьезным экономическим затратам, а иногда и к катастрофическим последствиям.

При проектировании сложных инженерных и строительных конструкций наиболее важным элементом анализа является исследование их напряженно-деформированного состояния, что приводит к необходимости автоматизации решения с помощью ЭВМ задач механики деформируемого твердого тела. В силу сложности физической природы исследуемых явлений и их математического описания решения получают при весьма существенных ограничениях относительно свойств материалов, конструктивных форм, граничных и начальных условий. Поэтому для моделирования и анализа напряженно-деформированного состояния на практике часто используют различные численные методы.

Обзор численных методов дискретизации объектов механики

Обычно численные методы основываются на дискретизации статических и математических моделей решаемых задач. В методах дискретизации рассматриваемая сплошная система с бесконечным числом степеней свободы аппроксимируется системой с конечным числом степеней свободы. Дифференциальные и интегральные уравнения, описывающие поведение сплошной среды, в методах дискретизации заменяются системой алгебраических уравнений, неизвестными в которой являются узловые значения разрешающей функции.

Среди них особое место занимают метод конечных разностей (МКР), вариационно-разностный метод (ВРМ) и метод конечных элементов (МКЭ) [1–11]. Помимо универсальности, обусловленной общими принципами механики, эти методы объединяет дискретная математическая модель исследуемого объекта. Состояние описывается системой алгебраических уравнений, решение которой определяет дискретное множество значений разрешающей функции в заранее намеченных точках (узлах) области. Однако путь «исследуемый объект – математическая модель» для каждого метода различен, что в значительной степени определяет области приложения методов, принципы доказательства существования и сходимости решений, процедуры реализации на ЭВМ.

Тот или другой метод дискретизации выбирается в зависимости от класса решаемых задач. Например, МКР широко используется в динамике жидкости и газа, в теории упругости, связанной с временными координатами, а МКЭ наиболее применим в механике деформированного твердого тела, строительной механике, в стационарных задачах теплопередачи и гидродинамики.

С точки зрения механики МКЭ базируется на замене исследуемого объекта совокупностью конечного числа дискретных элементов, соединенных между собой в отдельных узлах. Статические свойства каждого элемента определяются на основе вводимых механических гипотез, а искомые усилия (перемещения) – из условия кинематической (статической) совместимости системы. Приведенная трактовка обусловливает такую последовательность проведения исследования по МКЭ:

1) назначение расчетных узлов, в которых определяются величины разрешающей функции, и расчленение исследуемого объекта на конечные элементы желаемой формы;

2) установление зависимостей между усилиями и перемещениями в «контактных» узлах элемента, т. е. построение матриц жесткости (податливости);

3) составление системы алгебраических уравнений, выражающих кинематическую (статическую) совместимость деформации исследуемого объекта;

4) решение составленных уравнений и вычисление значений разрешающей функции в расчетных узлах;

5) определение компонентов напряженно-деформированного состояния исследуемой системы на основе найденных значений разрешающей функции.

Наиболее важными являются первые два пункта, определяющие количество и расположение расчетных узлов, форму конечных элементов (КЭ) и гипотезы о распределении перемещений или напряжений в области КЭ. От рационального решения этих вопросов зависит успех решения задачи в целом.

Если рассматривать МКЭ, для которого внутри КЭ перемещения аппроксимируются, например, полиномиальными функциями, а контакт на границах элементов осуществляется с учетом соблюдения условия неразрывности, то этот вариант МКЭ обладает медленной сходимостью в силу того, что полиномиальные функции не включали в себя слагаемые, описывающие жесткие смещения КЭ. Как следует из работ А. С. Сахарова [1; 2], этот эффект существеннее проявляется при использовании криволинейных КЭ, и учет жестких смещений КЭ следует рассматривать не как необходимое условие сходимости, а как важное средство повышения эффективности МКЭ при расчете тел криволинейной формы.

В процессе эксплуатации стандартной схемы МКЭ в форме метода перемещений, наряду с проблемой жестких смещений КЭ, было замечено и другое негативное свойство матрицы жесткости (МЖ), имеющее в настоящее время название «эффекта ложного сдвига». Суть его заключается в том, что при изгибе тонких пластин и оболочек, моделируемых трехмерными КЭ, значительно возрастают погрешности, связанные с появлением фиктивных сдвиговых деформаций.

Для устранения этих двух недостатков стандартных схем МКЭ в форме метода перемещений А. С. Сахаровым, В. В. Киричевским была разработана моментная схема конечных элементов (МСКЭ) [2; 3]. Эта схема позволяет учесть основные свойства жестких смещений как для изопараметрических, так и для криволинейных КЭ изотропных упругих тел. Суть ее заключается в отбрасывании определенных членов разложения деформаций, реагирующих на жесткие смещения и на появляющиеся фиктивные сдвиговые деформации. При этом точные уравнения связи деформаций и перемещений заменяются приближенными.

Во многих случаях сложность исследуемого объекта (нерегулярная структура, наличие отверстий, весьма неравномерный градиент разрешающей функции) делает необходимым использование в трехмерных задачах искривленных трехмерных КЭ. В целях упрощения учета геометрии элементов целесообразнее использовать криволинейные координаты. Однако такому уточненному учету геометрии противостоит трудность вычисления интегралов сложной структуры, зависящих от геометрических характеристик.

Успешное применение МКЭ в линейных задачах предопределило дальнейшее приложение этого метода к нелинейным задачам.

В большинстве рассмотренных работ по МКЭ коэффициенты МЖ представлялись в декартовой системе координат. Использование таких, уже готовых МЖ для исследования нерегулярных областей с криволинейными поверхностями становится затруднительным и вряд ли может давать хорошие результаты. Вопросы построения МЖ МКЭ в настоящее время достаточно изучены. Например, в работе [4] показано влияние аппроксимирующих функций при построении МЖ КЭ на скорость сходимости МКЭ. В ряде сложных задач, для исследования которых применяются криволинейные элементы произвольной формы, нет надобности в построении МЖ в численной форме. Целесообразнее иметь алгебраическое выражение МЖ, записанное в ковариантной форме, не зависящей от системы координат. В этом случае увеличивается эффективность работы вычислительных комплексов.

Решение сколь угодно простой задачи по МКЭ невозможно без привлечения компьютерных систем. Большинство существующих систем автоматизированного проектирования (САПР) ориентировано на использование МКЭ. К настоящему времени на основе МКЭ создано большое количество вычислительных программ и их число продолжает увеличиваться.

Обзор САПР

Вычислительные программы, разработанные до 1960 г., были в большинстве своем основаны на использовании метода сил в матричной форме с ручным вводом исходной информации и числом неизвестных, не превышающим 100. Развитие самолетостроения и ракетостроения в 1960–1970-е гг. усложнило задачи по проблемам прочности, таким образом, возрасли требования к большей детализации и точности дискретизации конструкций. Это привело к расчетным схемам с большим числом неизвестных. В работах этого периода отсутствовала четкая классификация программ, и сообщалось только об их применении без описания принципов работы.

Первый вычислительный комплекс программ в нашей стране был разработан в ПНИЛТПК КИСИ под руководством Д. В. Вайнберга в 1962–1964 гг. и назывался ВК-1 [5]. Переход к массовому расчету элементов конструкций потребовал модификации комплекса ВК-1 с целью полной автоматизации многосерийного счета, и новый вариант комплекса получил название ВК-2 [6]. Уже в то время комплекс позволял решать линейные и нелинейные

задачи статики, динамики, колебаний и устойчивости сложных конструкций на основе вариационно-разностного метода [6–8] и разработанных итерационных алгоритмов решения больших систем алгебраических уравнений [9].

Разработанный комплекс был ориентирован на ЭВМ М20/М220 и отличался значительной эффективностью благодаря рациональному построению алгоритмов разностных аппроксимаций и удачной логической структуре. Несмотря на малую оперативную память применяемых ЭВМ, успешно решались задачи с числом неизвестных до 600. Это позволило решить ряд новых, к тому времени еще не решенных задач строительной механики и теории упругости [4; 10].

Интересно отметить, что первые попытки решения задач статики сложных комбинированных систем также относятся к этому периоду [11]. Результатом опытной эксплуатации комплекса ВК-2 стал анализ обнаруженных трудностей и недостатков, что помогло определить задачи, которые решались в процессе создания вычислительного комплекса второго поколения – ПРОЧНОСТЬ-1 [12; 13]. Этот комплекс был реализован на быстродействующей ЭВМ БЭСМ-6, и в основу его реализации был положен более прогрессивный численный метод – МКЭ. В дальнейшем модернизированный вариант комплекса получил название ПРОЧНОСТЬ-75 [14–16] и был адаптирован для ЕС ЭВМ [17].

Один из первых зарубежных вычислительных комплексов ASKA (автоматическая система кинематического анализа) [18; 19] был создан в ФРГ под руководством Дж. Аргириса. Принципиальная идея ASKA состояла в создании универсального и гибкого инструмента для расчета МКЭ, который можно было бы использовать для решения практических задач механики без составления дополнительных программ.

ASKA тогда состояла примерно из 120 подпрограмм, каждая из которых могла быть загружена в оперативную память ЭВМ как некоторый логический объект. Здесь реализован принцип расчленения сложных объектов на суперэлементы, организована библиотека конечных элементов, содержащая большое количество одномерных, двумерных и трехмерных КЭ с числом степеней свободы в узле, достигающим 32. Большое внимание в системе уделено компактным способам задания входных данных, методам переработки и хранения информации, а также поиску и диагностике различных ошибок, встречающихся в процессе решения задач. Комплекс рассчитан на применение различных типов ЭВМ с большим быстродействием и оперативной памятью.

Французскими исследователями была создана универсальная система программ TITUS [20], которая позволяла решать широкий класс задач теории упругости, строительной механики и сопротивления материалов. Система была ориентирована на пользователя, где основное внимание уделено подготовке исходной информации, свободной от какого-либо формата и операции вывода данных. Автоматическое разбиение на элементы производится при помощи различных процедур, связанных с конкретным видом конструкции. Однако задача простого описания разбиения на элементы любой геометрической формы осталась нерешенной.

С точки зрения программирования в системе TITUS нет априорного ограничения на число соединений, элементов, характеристик. Ограничивается только число видов нагрузки (до 10), для которых можно вести расчеты одновременно. Все остальные ограничения связаны с типом используемой ЭВМ. В системе организовано «динамическое управление» используемой центральной памяти, что дает возможность смешанной обработки информации, т. е. использования двух ЭВМ, что особенно эффективно при решении больших по объему задач, где предварительная обработка может быть произведена на малой ЭВМ, а основная вычислительная работа – на большой. Все промежуточные результаты записываются на различные носители. Исходные данные задачи загружаются в упакованной форме с помощью системы вычислительных адресов, что позволило отказаться от обычно используемой в Фортране предварительной резервации массива.

Система программ SESAM-69 [21; 22], созданная в Норвегии и предназначенная для прочностного анализа судовых конструкций на основе суперэлементной дискретизации [23], представляет собой собрание программных модулей, которые могут комбинироваться различным образом. Благодаря блочной структуре в систему, по мере необходимости, можно вводить новые программные блоки.

Суперэлементный подход хорошо сочетается с модульной структурой и компактным программированием. Матрица жесткости для КЭ, так же как и результирующая матрица, разбивается на субматрицы приемлемых размеров, которые могут последовательно обрабатываться центральным процессором ЭВМ. Раздельная обработка левой и правой частей позволяет производить обработку нескольких правых частей одновременно. Операции над субматрицами выполняет набор стандартных подпрограмм, написанных как на Фортране, так и на ассемблере. Объединение суперэлементов осуществляется с помощью топологического описания. Возможности системы хорошо демонстрировались на примере расчета танкера ESSO NORWAY [23].

Далее, рассмотрим некоторые зарубежные и отечественные вычислительные комплексы, предназначенные для расчета пространственных конструкций на основе МКЭ, часть из которых являются программами общего назначения, возникшие ранее, модернизированные и не утратившие своего значения к данному моменту.

Большой универсальный комплекс общего назначения NASTRAN [24–26] разработан в исследовательских центрах NASA (США) и изначально был предназначен для решения задач американской аэрокосмической промышленности. Он реализовывал МКЭ в форме перемещений и насчитывал около 750 подпрограмм, написанных в основном на Фортране и частично на ассемблере. Метод подконструкций (суперэлементов) используется на основе специально разработанного языка абстрактных матричных операций – DMAP. Особое внимание уделено рациональным методам задания исходной информации, методам хранения и решения больших систем уравнений. Сейчас NASTRAN – 57-летняя система конечно-элементного расчета и анализа конструкций – предоставляет возможность расчета напряженно-деформированного состояния, запасов прочности, собственных частот и форм колебаний, анализ устойчивости, исследование установившихся и неустановившихся динамических процессов, решение задач теплопередачи, анализ сложного контактного взаимодействия, возможность моделирования различных типов материалов, включая композитные и гиперупругие. В состав расширенных функций входит технология суперэлементов, включая продвинутые методы динамических конденсаций, модальный синтез и развитые методы анализа динамики сложных структур на основе суперэлементов [27].

Популярность среди образовательных и исследовательских организаций получили пакеты программ с открытым исходным кодом. Так, Tahoe, Elmer, CalculiX и др. позволяют пользователям реализовывать свои алгоритмы анализа, не прибегая к созданию модулей пре- и постпроцессора [28]. Например, свободная платформа SALOME кроме внутреннего языка Python дает возможность написания модулей на C++ [1].

По настоящее время одним из наиболее известных и широко применяемых программных комплексов является ANSYS [29–31]. Данная программная система позволяет численно решать пространственные задачи статического и динамического нагружения, задачи с учетом геометрической нелинейности, устойчивости, механики разрушения и целый ряд тому подобных классов задач. Кроме задач механики деформированного твердого тела ANSYS позволяет решать также ряд задач гидродинамики, акустики и др.

Более подробные обзоры других современных САПР (CATIA, COSMOS, MECHANICA, PATRAN, ABAQUS, LS-DYNA, PRO/ENGINEER, ADINA, HyperWorks и др.) можно найти, например, в работах [32–35].

[1] SALOME. URL: https://www.salome-platform.org/ (дата обращения 05.05.2020).

На первых этапах практической реализации МКЭ решение сложных задач значительно осложнялось из-за несоответствия количества подготовленных данных возможностям их переработки [36; 37]. Позже эти проблемы приобрели первостепенное значение, но их решение происходит медленно. Одной из таких проблем на пути автоматического генерирования исходных данных является деление конструкции на элементы. Автоматическое образование сетки координат, очевидно, существенно, если используются тетраэдральные элементы, однако при применении их возникают затруднения, которые можно преодолеть, заранее объединив тетраэдры в призмы и шестигранные элементы. Ряд разработчиков используют комбинированные схемы МКЭ, более эффективные (с сокращением времени вычислений и улучшением точности результата) гибридные МКЭ, поскольку для ускорения циклов анализа необходима адаптация модели САПР. Этап адаптации заключается в упрощении геометрии модели САПР за счет исключения деталей (отверстий, фасок, углового сечения и т. п.) и граней [38].

В странах бывшего СНГ также достигнуты большие успехи в разработке вычислительных комплексов программ для ЭВМ на основе МКЭ: ПРОЧНОСТЬ-1, КАСКАД-2, МИРАЖ, СУПЕР, ЛИРА, МОРЕ, РАССУДОК, ГАММА, КОДЕТОМ, МИРЕЛА+, КОМПАС, COMSOL и др. [35].

Украино-российская разработка ЛИРА в виде программного комплекса предназначена для проектирования и расчета строительных и машиностроительных конструкций. Для расчета модели данный комплекс имеет несколько процессоров: линейный (работа материала конструкций в линейно-упругой постановке) и нелинейный (учитывает физическую нелинейность материала в рамках теории упругости и в упругопластической постановке, геометрическую нелинейность и конструктивную нелинейность), а также вспомогательные процессоры (используются для исследования основной расчетной модели). Расчетные процессоры используют МКЭ в перемещениях для определения напряженно-деформированного состояния конструкции с большим выбором конечных элементов. Согласно описанию, при дискретизации рассматриваемых объектов и переходе к системам уравнений, данный программный комплекс не накладывает ограничения на количество узлов и элементов, что позволяет добиться высокой точности [39].

Программный комплекс FORTU-FEM разработан для автоматизации анализа сложных механических процессов на базе МКЭ и позволяет решать широкий класс задач машиностроения. Эта САПР позволяет генерировать в автоматическом режиме дискретные модели сложных трехмерных тел, проводить конечно-элементный анализ и визуализировать результаты. Данный программный комплекс имеет встроенный объектно-ориентированный язык программирования FORTU-3, который является методом описания общей постановки задачи и метода ее расчета. В процессе расчета пользователь имеет возможность выбирать тип КЭ, вид функционала, который минимизируется. В состав FORTU-FEM входят две подсистемы: подсистема дискретизации произвольной геометрической области на КЭ и подсистема анализа, позволяющая эффективно исследовать полученные численные результаты [40].

Обзор программного комплекса МИРЕЛА+

Программный комплекс МИРЕЛА+ разработан для автоматизации анализа задач механики эластомеров на основе МКЭ. Вычислительный комплекс МИРЕЛА+ [41; 42] является дальнейшим развитием вычислительной системы КОДЕТОМ и предназначен для исследования прочности, долговечности и разрушения конструкций из эластомерных и композитных материалов в условиях линейного и нелинейного вязкоупругого деформирования.

Каждый модуль в процессоре МИРЕЛА+, как и многих других САПР, реализует определенный вид расчета некоторым методом, жестко заложенным на этапе его разработки. Это приводит к тому, что большинство таких САПР являются закрытыми для пользователя, что не позволяет ему выполнять анализ задач, методы решения которых не были предусмотрены

и реализованы разработчиками конкретного программного комплекса. В этом случае инженер-проектировщик должен либо самостоятельно программировать численную схему решения задачи, либо использовать другую систему автоматизации анализа напряженно-деформированного состояния. Каждый из этих этапов представляет собой самостоятельную сложную задачу, требующую для решения значительных временных и вычислительных затрат.

Пример конечно-элементной модели эластомерных элементов конструкций и визуальное представление результатов расчета их напряженно-деформированного состояния в системе МИРЕЛА+ изображен на рис. 1. Структура вычислительного комплекса МИРЕЛА+ представлена на рис. 2.

Расчет конструкций МКЭ в МИРЕЛА+ осуществляется в виде трех взаимосвязанных последовательных процессов:

1) подготовка исходных данных – конечно-элементная дискретизация рассчитываемого объекта, его топология и кинематические и силовые граничные условия, физико-механические характеристики материала;

2) численный расчет конечно-элементной модели – вычисление коэффициентов матрицы жесткости конечных элементов, формирование глобальной системы разрешающих уравнений и ее решение;

3) обработка результатов решения – вычисление параметров напряженно-деформированного и температурного состояния конструкции; их визуальное представление в виде таблиц, графиков, двумерных либо трехмерных изображений.

Эти процессы численной реализации выполняются тремя подсистемами – препроцессором, процессором и постпроцессором соответственно. Препроцессор представляет собой блок подпрограмм, обеспечивающих задание геометрии исследуемого объекта, структура которого представлена на рис. 3.

Для задания геометрии имеется библиотека фигур стандартных типоразмеров: призматические, цилиндрические, сферические, конические и тела вращения. Геометрия нестандартных объектов задается посредством опорных точек, которые являются точками изменений в очертании фигуры.

Для описания конструкции, как уже упоминалось, вводятся две системы координат – базисная декартовая система координат $z^{k'}$, в которой задаются геометрические координаты узлов, поля нагрузок и граничных условий и местная криволинейная система координат x^i, в которой задается нумерация и сеточные координаты узлов (рис. 4).

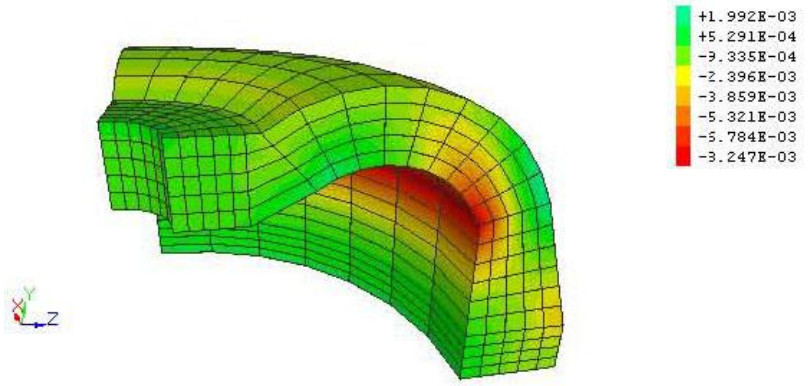

Рис. 1. Конечно-элементная модель резинового амортизатора
Fig. 1. A finite element model of a rubber shock absorber

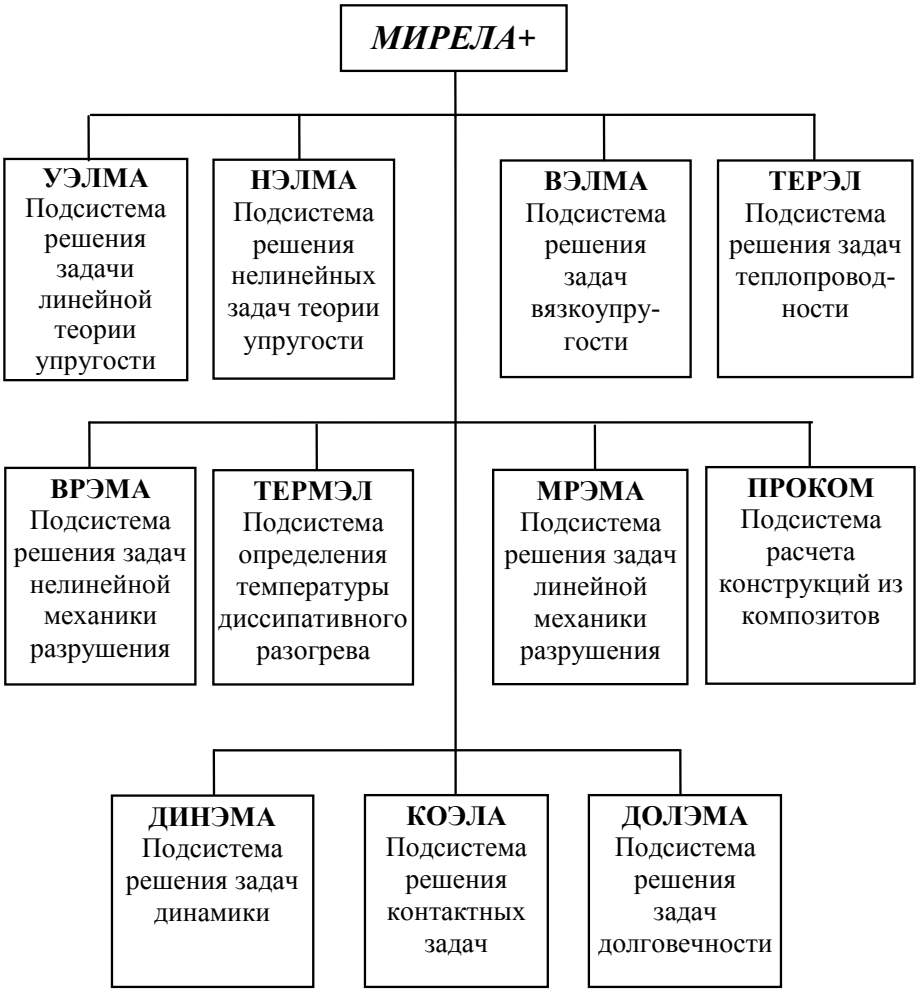

Рис. 2. Структура вычислительнго комплекса МИРЕЛА+
Fig. 2. The structure of the computing complex MIRELA+

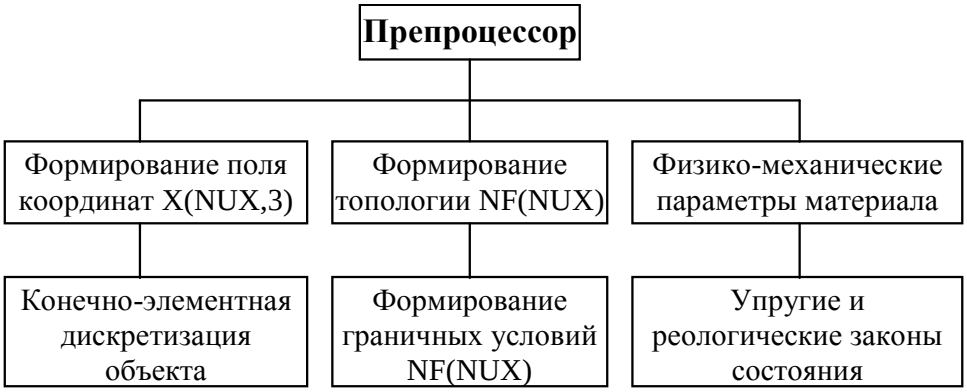

Рис. 3. Структура препроцессора
Fig. 3. Structure of the preprocessor

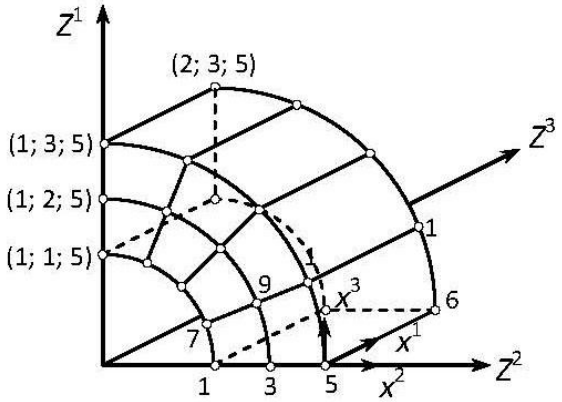

Рис. 4. Пространственная и сеточная нумерация узлов
Fig. 4. Spatial and grid node numbering

Блок процессора занимает центральное место при решении задач МКЭ, это ядро системы. Он включает в себя подпрограммы вычисления коэффициентов матрицы жесткости или теплопроводности конечных элементов, температурных нагрузок. Существует два подхода к формированию глобальной матрицы жесткости конструкции. Первый: матрица формируется из матриц жесткости КЭ с последующим суммированием по одноименным узлам. Второй: система уравнений формируется по строкам из коэффициентов матрицы жесткости КЭ, примыкающих к текущему узлу.

Алгоритм построения системы разрешающих уравнений следующий.

1. Определяется действительный номер индексной решетки

$$N^d(I,J,K) = N14 = N^c + I - 2 + M1(J-2) + M1 \cdot M2(K-2),$$

где N^c – номер центрального узла сеточной решетки; I, J, K – сеточные координаты узла; $M1, M2$ – размеры сетки разбиения на КЭ.

2. Вычисляются коэффициенты МЖ КЭ, примыкающих к узлу $N14$. Для этого каждому узлу КЭ задается смещение по m-му направлению, и вычисляется реакция в узле N^d по n-му направлению $(m, n = 1,2,3)$. Ввиду симметрии МЖ вычисляется не 576, а только 300 коэффициентов.

3. Определяются относительные номера узлов индексной решетки по сеточным координатам элемента ($i, j, k = 1,2;\quad i', j', k' = 1,2$)

$$l = i + i' + 3(j + j') + 9(k + k') - 25.$$

4. Значения коэффициентов заносятся в массив $RM^{(N)}(m,n,l)$. Для одного узла сеточной области вычисляется $3 \times 3 \times 27 = 243$ коэффициента. При одноименных вариациях перемещений N-го узла коэффициенты суммируются

$$RM^{(N)}(m,n,l) = \sum_{r=1}^{E} RM_r^{(N)}(m,n,l),$$

где E – число КЭ, примыкающих к узлу $N14$ (рис. 5).

5. Выполняется рассылка коэффициентов матрицы в матрицу системы разрешающих уравнений

$$K_{ij} \leftarrow RM^{(N)}(m,n,l).$$

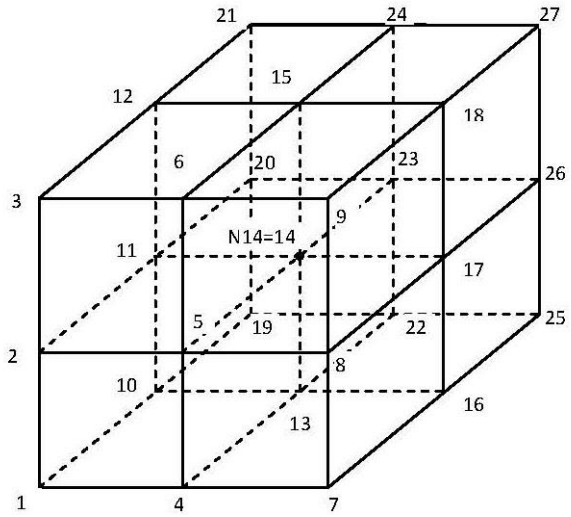

Рис. 5. Пространственная индексация КЭ решетки
Fig. 5. Spatial indexing of the grid

Между индексами существует следующее соответствие:

- действительный номер – $N = INT\left(\frac{i-1}{3}+1\right)$;
- направление реакции – $m = i - 3(N-1)$;
- номер смещаемого узла – $N^c = INT\left(\frac{j-1}{3}+1\right)$;
- направление смещаемого узла – $m = j - 3(N^c - 1)$;
- относительный номер индексной решетки $l = N^c - N + 14$.

Система линейных алгебраических уравнений, построенная таким образом, симметричная и имеет ленточный вид

$$\left[K^{ij}\right]\left\{u_j\right\} = \left\{P^i\right\}. \quad (1)$$

Вторая задача блока – это решение системы (1) модифицированным блочным методом Гаусса для ленточных, симметричных матриц либо другим точным, приближенным методом (комплекс допускает расширение).

Результатом решения системы (1) является вектор узловых перемещений $\left\{u_j\right\}$. По вычисленному вектору узловых перемещений $\left\{u_j\right\}$ определяются компоненты тензора деформаций ε_{ij} в центрах КЭ в декартовой системе координат:

$$\varepsilon_{11} = \Delta_1 u_1 c_1^1 + \Delta_1 u_2 c_1^2 + \Delta_1 u_3 c_1^3;$$

$$\varepsilon_{22} = \Delta_2 u_1 c_2^1 + \Delta_2 u_2 c_2^2 + \Delta_2 u_3 c_2^3;$$

$$\varepsilon_{22} = \Delta_3 u_1 c_2^1 + \Delta_3 u_2 c_2^2 + \Delta_3 u_3 c_2^3;$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}(\Delta_2 u_1 c_1^1 + \Delta_2 u_2 c_1^2 + \Delta_2 u_3 c_1^3 + \Delta_1 u_1 c_2^1 + \Delta_1 u_2 c_2^2 + \Delta_1 u_3 c_2^3);$$

$$\varepsilon_{13}=\varepsilon_{31}=\frac{1}{2}(\Delta_3 u_1 c_1^1+\Delta_3 u_2 c_1^2+\Delta_3 u_3 c_1^3+\Delta_1 u_1 c_3^1+\Delta_1 u_2 c_3^2+\Delta_1 u_3 c_3^3);$$

$$\varepsilon_{23}=\varepsilon_{32}=\frac{1}{2}(\Delta_3 u_1 c_2^1+\Delta_3 u_2 c_2^2+\Delta_3 u_3 c_2^3+\Delta_2 u_1 c_3^1+\Delta_2 u_2 c_3^2+\Delta_2 u_3 c_3^3).$$

Определяются компоненты тензора преобразования координат $c_j^{i'}$.

Для линейного элемента градиенты деформаций $\Delta_i u_j$ вычисляются в центре КЭ (рис. 6) через узловые перемещения $U(N,I)$ по формулам:

$$\Delta_i U_1=\frac{1}{4}(U(2,i)+U(4,i)+U(6,i)+U(8,i)-U(1,i)-U(3,i)-U(5,i)-U(7,i));$$

$$\Delta_i U_2=\frac{1}{4}(U(3,i)+U(4,i)+U(7,i)+U(8,i)-U(1,i)-U(2,i)-U(5,i)-U(5,i));$$

$$\Delta_i U_3=\frac{1}{4}(U(5,i)+U(6,i)+U(7,i)+U(8,i)-U(1,i)-U(2,i)-U(3,i)-U(4,i)).$$

Компоненты тензора напряжений также вычисляются в центре КЭ по зависимостям:

$$\sigma^{11}=2\mu\varepsilon_{11}+\lambda\theta\ ;\quad \theta=(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})/3;$$

$$\sigma^{22}=2\mu\varepsilon_{22}+\lambda\theta;$$

$$\sigma^{33}=2\mu\varepsilon_{33}+\lambda\theta;$$

$$\sigma^{12}=\sigma^{21}=2\mu\varepsilon_{12};\ \sigma^{13}=\sigma^{31}=2\mu\varepsilon_{13};\ \sigma^{23}=\sigma^{32}=2\mu\varepsilon_{23}.$$

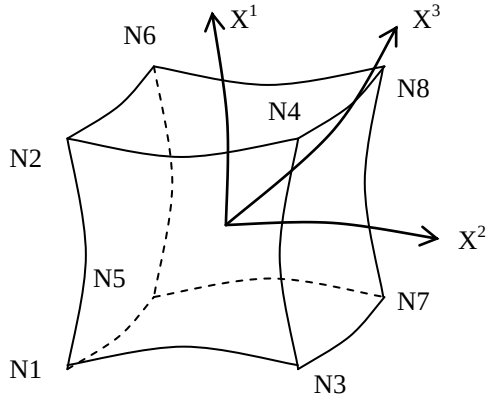

Рис. 6. Пространственная нумерация узлов КЭ
Fig. 6. Spatial numbering of FE nodes

Результаты расчета конструкции могут быть представлены в виде таблиц перемещений, деформаций и напряжений в узлах и центрах КЭ дискретной области, а также графически в виде муаровых полос, изолиний или поверхностей функций перемещений и напряжений по объему или в заданных сечениях. Визуальное представление осуществляется в виде двумерного или трехмерного изображения с помощью полутоновой или цветной картины, где каждому оттенку или цвету соответствует определенный диапазон числовых значений функции.

Несмотря на то, что ANSYS, например, решает более широкий круг задач: служит для анализа поведения материалов и конструкций при краткосрочных значительных и критических нагрузках, высоких давлениях или взрывах, для моделирования деформаций и разрушения материала, для проведения прочностных и усталостных расчетов, для моделирования взаимодействия жидкостей, газов и твердых тел, фазовых переходов, распространения ударных волн, для моделирования пластического и гиперупругого нелинейного поведения материала, проведения гармонических, сейсмических и вибрационных расчетов, моделирования контактного взаимодействия и анализа кинематики механизмов, – МИРЕЛА+ кроме того, что также решает многие задачи механики деформации твердого тела, имеет специальную направленность на решение задач диссипативного разогрева, параметров механики разрушения массивных эластомерных элементов конструкций и тонкослойных резинометаллических элементов с трещинами с изменяющимися физико-механическими и теплофизическими параметрами в условиях циклического деформирования. Не многие из отечественных программ это смогут реализовать, а лицензии зарубежных программ стоят десятки тысяч долларов.

Заключение

Проведенный обзор существующих САПР показывает, что применение в их структуре МКЭ остается вполне актуальным перед другими методами в скорости вычислений, достаточной точности и программной реализации в структуре САПР. Для решения задач механики эластомеров и композитов на их основе комплекс МИРЕЛА+ эффективно справляется с поставленными задачами в области линейного и нелинейного вязкоупругого деформирования, исследования температурных полей диссипативного разогрева, параметров механики разрушения, долговечности работы конструкций при различных видах нагружений.

Список литературы

1. **Сахаров А. С.** Модификация метода Ритца для расчета массивных тел на основе полиномиальных разложений с учетом жестких смещений // Сопротивление материалов и теория сооружений. 1974. Вып. 23. С. 61–70.
2. **Сахаров А. С.** Моментная схема метода конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений // Сопротивление материалов и теория сооружений. 1974. Вып. 24. С. 147–156.
3. **Сахаров А. С., Кислоокий В. Н., Киричевский В. В. и др.** Метод конечных элементов в механике твердых тел. Киев, Вища школа, 1982. 480 с.
4. **Киричевский Р. В., Скринникова А. В.** Влияние аппроксимирующих функций при построении матрицы жесткости конечного элемента на скорость сходимости МКЭ // Вестник Том. гос. ун-та. Матем. и мех. 2019. № 57. С. 26–37.
5. **Вайнберг Д. В., Синявский А. Л.** Дискретный анализ в теории упругости // Численные методы расчета пространственных конструкций. Киев: КИСИ, 1968. С. 5–38.
6. **Вайнберг Д. В.** Численные методы в теории оболочек и пластин // Тр. IV Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван, 1966. С. 206–215.
7. **Ворошко П. П.** Вариационно-разностный метод решения трехмерных задач в теории упругости // Численные методы расчета пространственных конструкций. Киев: КИСИ, 1968. С. 209–215.
8. **Ворошко П. П., Сахаров А. С.** Построение разностных уравнений теории упругости и их получение на ЭВМ // Сопротивление материалов и теория сооружений. 1966. Вып. 4. С. 174–190.

9. **Ильченко Е. Н., Сахаров А. С.** О решении больших систем уравнений при расчете пластин и оболочек // Сопротивление материалов и теория сооружений. 1972. Вып. 16. С. 259–263.
10. **Геращенко В. М.** Расчет пластинчатых и коробчатых систем // Численные методы расчета пространственных конструкций. Киев: КИСИ, 1968. С. 49–70.
11. **Гоцуляк Е. А. и др.** Блочный метод расчета комбинированных систем // Численные методы расчета пространственных конструкций. Киев: КИСИ, 1968. С. 197–208.
12. **Кислоокий В. Н., Сахаров А. С.** Проблемно-ориентированный вычислительный комплекс прочностных расчетов пространственных конструкций // Организация и методика строительного проектирования с применением вычислительной и организационной техники. М.: ЦНИПИАСС, 1974. Вып. 2. С. 10–14. (ГОССТРОЙ СССР, Серия X)
13. **Вайнберг Д. В. и др.** Система математического обеспечения расчета пространственных конструкций «Прочность-1» // Организация и методика строительного проектирования. М.: ЦНИПИАС, 1972. Вып. 2. С. 6–10. (ГОССТРОЙ СССР, Серия X)
14. **Исаханов Г. В. и др.** Система математического обеспечения прочностных расчетов пространственных конструкций // Проблемы прочности. 1978. № 11. С. 59–61; № 12. С. 25–28.
15. **Гончаренко И. Е. и др.** Проблемно-ориентированные языки пользователя. Формальное описание. ПРОЧНОСТЬ-75. Система математического обеспечения расчетов пространственных конструкций. Киев: Республиканский фонд алгоритмов и программ АН УССР, 1975. Т. 4. 550 с.
16. **Гончаренко И. Е. и др.** Комплекс прикладных программ расчета оболочечных конструкций. Листинг. ПРОЧНОСТЬ-75. Система математического обеспечения расчетов пространственных конструкций. Киев: Республиканский фонд алгоритмов и программ АН УССР, 1975. Т. 5. 357 с.
17. **Бесценный Ю. Г. и др.** Система автоматизации комплексного расчета пространственных конструкций на ЕС ЭВМ // Комплексный расчет зданий и сооружений с применением ЭВМ. Киев: КИСИ, 1978. С. 55–58.
18. **Скрим Э., Рой Дж. Р.** Автоматическая система кинематического анализа // Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ: В 2 т. / Пер. с англ., под ред. А. П. Филина. Л.: Судостроение, 1974. Т. 2. С. 36–67.
19. **Argyris J. H.** ASKA: automatic system for kinematic analysis – a universal system for structural analysis based on the matrix displacement (finite element) method. *Nucl. Eng. Des.*, 1969, no. 2, pp. 441–447.
20. **Launay P. et al.** The three-dimensional thermoelastic computer code “TITUS”. In: Prepr. 1st Int. Conf. Struct. Mech. React. Technol. Berlin, Amsterdam, Amsterdam e.a., 1971, no. 5, pp. M5-4/1–M5-4/21.
21. **Araldsen P. O., Egeland O.** General description of SESAM-69 super element structural analysis (Program) modules. *European Shipbuilding*, 1971, no. 2, pp. 21–35.
22. **Egeland O., Araldsen P. O.** SESAM-69 – A general purpose finite element method program. *Intern. J. of Computers and Structures*, 1974, no. 1, pp. 41–68.
23. **Araldsen P. O.** The application of the superelement method in analysis and design of ship structures and machinery components. In: National Symp. on Computerized structural Analysis and Design. Norway, March, 1972, pp. 2–93.
24. **Butler T. G., Michel D.** NASTRAN. A summary of the functions and capabilities of the NASA structural analysis computer system. Washington, 1971, 22 p. (NASA SP-260)
25. **McNeal R. H., McCormic C. W.** The NASTRAN computer program for structural analysis. *Comput. and Struct.*, 1971, no. 1, pp. 32–35.
26. **Tocher J. L., Herness E. D.** A critical view of NASTRAN. *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, 1973, pp. 151–174.

27. **Чумаченко Е. Н. и др.** Математическое моделирование в нелинейной механике (обзор программных комплексов для решения задач моделирования сложных систем). М., 2009. 23 с.
28. **Faas D., Vance J. M.** Interactive deformation through mesh-free stress analysis in virtual reality. *Mechanical Engineering Conference Presentations, Papers, and Proceedings*, 2008, p. 46.
29. **Фролов Д.** Обзор возможностей ANSYS Mechanical для решения инженерных задач // САПР и графика. 2010. № 11. URL: http://www.caeexpert.ru/sites/default/files/obzor_vozmozhnostey_ansys_mechanical_dlya_resheniya_inzhenernyh_zadach.pdf.
30. **Чигарёв А. В., Кравчук А. С., Смалюк А. Ф.** ANSYS для инженеров: Справ. пособие. М.: Машиностроение-1, 2004. 512 с.
31. **Черпаков А. В. и др.** Моделирование колебаний при импульсном воздействии многослойной конструкции в комплексе Ansys // Инженерный вестник Дона. 2019. № 6. URL: http:// ivdon.ru/ru/magazine/archive/n6y2019/6057.
32. **Селяков М. Ю.** Отечественные и зарубежные CAD/CAM системы // Успехи современного естествознания. 2011. № 7. С. 193–197.
33. **Иванов С. Е.** Интеллектуальные программные комплексы для технической и технологической подготовки производства. Часть 5: Системы инженерного расчета и анализа деталей и сборочных единиц: Учеб.-метод. пособие / Под ред. Д.Д. Куликова. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2011. 48 с.
34. **Павлов С.** CAE – технологии в 2013 году: обзор достижений и анализ рынка // CAD/CAM/CAE Observer. 2014. № 4 (88). URL: http://www.cadcamcae.lv/N88/08-18.pdf.
35. **Калинин А. В., Хвалин А. Л.** Применение метода конечных элементов в современных системах автоматизированного проектирования // Гетеромагнитная микроэлектроника. 2019. № 26. С. 41–51.
36. **Городецкий А. С. и др.** Метод конечных элементов: теория и численная реализация. Киев: Факт, 1997. 137 с.
37. **Киричевский Р. В.** Численное моделирование температурных полей диссипативного разогрева конструкций из эластомеров с трещинами. Киев: Наук. дум., 1998. 120 с.
38. **Mounir H., Nizar A., Borhen L., Benamara A., Deneux D.** FEM Simulation Based on CAD Model Simplification: A Comparison Study between the Hybrid Method and the Technique Using a Removing Details. *Design and Modeling of Mechanical Systems*, 2013, pp. 587–596. DOI 10.1007/978-3-642-37143-1_70
39. **Городецкий Д. А. и др.** Программный комплекс ЛИРА-САПР 2013: Учеб. пособие. Киев; Москва: Электронное издание, 2013. 376 с.
40. **Mezhuev V., Lavrik V., Ravi S.** Development and application of the problem-oriented language FORTU for the design of non-standard mechanical constructions. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, 2015, no. 9 (2), pp. 1–9. DOI 10.5937/jsscm1502001M
41. **Киричевский В. В. и др.** Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МІРЕЛА+». Киев: Наук. дум., 2005. 403 с.
42. **Киричевский В. В. и др.** Развитие метода конечных элементов и его применение в САПР // Вестник Запорож. нац. ун-та. Физ.-мат. науки. 2006. № 1. С. 38–56.

References

1. **Sakharov A. S.** Modifikatsiya metoda Rittsa dlya rascheta massivnikh tel na osnove polinomialnykh razlozhenii s uchetom zhestkikh smeshchenii. *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzhenii*, 1974, no. 23, pp. 61–70. (in Russ.)
2. **Sakharov A. S.** Momentnaya skhema metoda konechnykh elementov (MSKE) s uchetom zhestkikh smeshchenii. *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzhenii*, 1974, no 24, pp. 147–156. (in Russ.)

3. **Sakharov A. S., Kislooky V. N., Kirichevsky V. V. et al.** Metod konechnykh elementov v mekhanike tverdykh tel. Kiev, Vischa shkola, 1982, 480 p. (in Russ.)
4. **Kirichevsky R. V., Skrinnikova A. V.** Vliyanie approksimiruyushchikh funktsii pri postroenii matritsi zhestkosti konechnogo elementa na skorost skhodimosti MKE. *Vestnik Tomsk. gos. un-ta. Matem. i mekh.*, 2019, no. 57, pp. 26–37. (in Russ.)
5. **Vainberg D. V., Sinyavsky A. L.** Diskretnii analiz v teorii uprugosti. In: Chislennie metodi rascheta prostranstvennykh konstruktsii. Kiev, KISI Press, 1968, pp. 5–38. (in Russ.)
6. **Vainberg D. V.** Chislennie metodi v teorii obolochek i plastin. In: Trudi IV Vsesoyuznoi konf. po teorii obolochek i plastin. Erevan, 1966, pp. 206–215. (in Russ.)
7. **Voroshko P. P.** Variatsionno-raznostnyi metod resheniya trekhmernykh zadach v teorii uprugosti. In: Chislennye metody rascheta prostranstvennykh konstruktsii. Kiev, KISI Press, 1968, pp. 209–215. (in Russ.)
8. **Voroshko P. P., Sakharov A. S.** Postroenie raznostnykh uravnenii teorii uprugosti i ikh poluchenie na EVM. *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzhenii*, 1966, no. 4, pp. 174–190. (in Russ.)
9. **Ilchenko E. N., Sakharov A. S.** O reshenii bolshikh sistem uravnenii pri raschete plastin i obolochek. *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzhenii*, 1972, no. 16, pp. 259–263. (in Russ.)
10. **Geraschenko V. M.** Raschet plastinchatykh i korobchatykh system. Chislennye metody rascheta prostranstvennykh konstruktsii. Kiev, KISI Press, 1968, pp. 49–70. (in Russ.)
11. **Gotsulyak E. A. et al.** Blochnii metod rascheta kombinirovannih system. In: Chislennye metody rascheta prostranstvennykh konstrukysii. Kiev, KISI Press, 1968, pp. 197–208. (in Russ.)
12. **Kislooky V. N., Sakharov A. S.** Problemno-orientirovannyi vichislitelnyi kompleks prochnostnykh raschetov prostranstvennykh konstruktsii. In: Organizatsiya i metodika stroitelnogo proektirovaniya s primeneniem vichislitelnoi i organizacionnoi tekhniki. Moscow, CNIPIASS, 1974, iss. 2, pp. 10–14. (in Russ.)
13. **Vainberg D. V. et al.** Sistema matematicheskogo obespecheniya rascheta prostranstvennykh konstruktsii “Prochnost_1”. In: Organizatsiya i metodika stroitelnogo proektirovaniya. Moscow, CNIPIAS, 1972, iss. 2, pp. 6–10. (in Russ.)
14. **Isakhanov G. V. et al.** Sistema matematicheskogo obespecheniya prochnostnykh raschetov prostranstvennykh konstruktsii. *Problemy prochnosti*, 1978, no. 11, pp. 59–61; no. 12, pp. 25–28. (in Russ.)
15. **Goncharenko I. E. et al.** Problemno-orientirovannye yaziki polzovatelya. Formalnoe opisanie. PROChNOST-75. Sistema matematicheskogo obespecheniya raschetov prostranstvennykh konstruktsii. Kiev, Respublikanskii fond algoritmov i programm AN USSR, 1975, vol. 4, 550 p. (in Russ.)
16. **Goncharenko I. E. et al.** Problemno-orientirovannye yaziki polzovatelya. Formalnoe opisanie. PROChNOST-75. Sistema matematicheskogo obespecheniya raschetov prostranstvennykh konstruktsii. Kiev, Respublikanskii fond algoritmov i programm AN USSR, 1975, vol. 5, 357 p. (in Russ.)
17. **Bestsenny Yu. G. et al.** Sistema avtomatizatsii kompleksnogo rascheta prostranstvennykh konstruktsii na ES EVM. In: Kompleksnyi raschet zdanii i sooruzhenii s primeneniem EVM. Kiev, KISI, 1978, pp. 55–58. (in Russ.)
18. **Skrim E., Roi Dj. R.** Avtomaticheskaya sistema kinematicheskogo analiza. In: Raschet uprugikh konstruktsii s ispolzovaniem EVM. In 2 vols. Trans from Eng., ed. by A. P. Filin. Leningrad, Sudostroenie, 1974, vol. 2, pp. 36–67. (in Russ.)
19. **Argyris J. H.** ASKA: automatic system for kinematic analysis – a universal system for structural analysis based on the matrix displacement (finite element) method. *Nucl. Eng. Des.*, 1969, no. 2, pp. 441–447.

20. **Launay P. et al.** The three-dimensional thermoelastic computer code “TITUS”. In: Prepr. 1st Int. Conf. Struct. Mech. React. Technol. Berlin, Amsterdam, Amsterdam e.a., 1971, no. 5, pp. M5-4/1–M5-4/21.
21. **Araldsen P. O., Egeland O.** General description of SESAM-69 super element structural analysis (Program) modules. *European Shipbuilding*, 1971, no. 2, pp. 21–35.
22. **Egeland O., Araldsen P. O.** SESAM-69 – A general purpose finite element method program. *Intern. J. of Computers and Structures*, 1974, no. 1, pp. 41–68.
23. **Araldsen P. O.** The application of the superelement method in analysis and design of ship structures and machinery components. In: National Symp. on Computerized structural Analysis and Design. Norway, March, 1972, pp. 2–93.
24. **Butler T. G., Michel D.** NASTRAN. A summary of the functions and capabilities of the NASA structural analysis computer system. Washington, 1971, 22 p. (NASA SP-260)
25. **McNeal R. H., McCormic C. W.** The NASTRAN computer program for structural analysis. *Comput. and Struct*., 1971, no. 1, pp. 32–35.
26. **Tocher J. L., Herness E. D.** A critical view of NASTRAN. *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, 1973, pp. 151–174.
27. **Chumachenko E. N. et al.** Matematicheskoe modelirovanie v nelineinoi mehanike (obzor programmnykh kompleksov dlya resheniya zadach modelirovaniya slozhnykh sistem). Moscow, 2009, 23 p. (in Russ.)
28. **Faas D., Vance J. M.** Interactive deformation through mesh-free stress analysis in virtual reality. *Mechanical Engineering Conference Presentations, Papers, and Proceedings*, 2008, p. 46.
29. **Frolov D.** Obzor vozmozhnostei ANSYS Mechanical dlya resheniya inzhenernykh zadach. *SAPR i grafika*, 2010, no. 11. (in Russ.) URL: http://www.caeexpert.ru/sites/default/files/obzor_vozmozhnostey_ansys_mechanical_dlya_resheniya_inzhenernyh_zadach.pdf.
30. **Chigarev A. V., Kravchuk A. S., Smalyuk A. F.** ANSYS dlya injenerov. Sprav. posobie. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004, 512 p. (in Russ.)
31. **Cherpakov A. V. et al.** Modelirovanie kolebanii pri impulsnom vozdeistvii mnogosloinoi konstrukcii v komplekse Ansys. *Inzhenernyi vestnik Dona*, 2019, no. 6. (in Russ.) URL: http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n6y2019/6057.
32. **Selyakov M. Yu.** Otechestvennie i zarubejnie CAD/SAM sistemi. *Uspehi sovremennogo estestvoznaniya*, 2011, no. 7, pp. 193–197. (in Russ.)
33. **Ivanov S. E.** Intellektualnie programmnie kompleksi dlya tekhnicheskoi i tekhnologicheskoi podgotovki proizvodstva. Chast 5: Sistemy inzhenernogo rascheta i analiza detalei i sborochnykh edinits. Uchebno-metodicheskoe posobie. Ed. by D. D. Kulikov. St. Petersburg, SPbGU ITMO, 2011, 48 p. (in Russ.)
34. **Pavlov S.** CAE – tekhnologii v 2013 godu: obzor dostizhenii i analiz rynka. *CAD/CAM/CAE Observer*, 2014, no. 4 (88). (in Russ.) URL: http://www.cadcamcae.lv/N88/08-18.pdf.
35. **Kalinin A. V., Khvalin A. L.** Primenenie metoda konechnykh elementov v sovremennykh sistemakh avtomatizirovannogo proektirovaniya. *Geteromagnitnaya mikroelektronika*, 2019, no. 26, pp. 41–51. (in Russ.)
36. **Gorodetsky A. S. et al.** Metod konechnykh elementov: teoriya i chislennaya realizatsiya. Kiev, Fakt, 1997, 137 p. (in Russ.)
37. **Kirichevsky R. V.** Chislennoe modelirovanie temperaturnykh polei dissipativnogo razogreva konstruktsii iz elastomerov s treschinami. Kiev, Naukova Dumka, 1998, 120 p. (in Russ.)
38. **Mounir H., Nizar A., Borhen L., Benamara A., Deneux D.** FEM Simulation Based on CAD Model Simplification: A Comparison Study between the Hybrid Method and the Technique Using a Removing Details. *Design and Modeling of Mechanical Systems*, 2013, pp. 587–596. DOI 10.1007/978-3-642-37143-1_70
39. **Gorodetsky D. A. et al.** Programmnii kompleks LIRA-SAPR 2013. Uchebnoe posobie. Kiev, Moscow, Elektronnoe izdanie, 2013, 376 p. (in Russ.)

40. **Mezhuev V., Lavrik V., Ravi S.** Development and application of the problem-oriented language FORTU for the design of non-standard mechanical constructions. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, 2015, no. 9 (2), pp. 1–9. DOI 10.5937/jsscm1502001M
41. **Kirichevsky V. V. et al.** Metod konechnykh elementov v vichislitelnom komplekse “MIRELA+”. Kiev, Naukova Dumka, 2005, 403 p. (in Russ.)
42. **Kirichevsky V. V. et al.** Razvitie metoda konechnykh elementov i ego primenenie v SAPR. *Vestnik Zaporozhskogo nats. un-ta. Fiz.-mat. nauki*., 2006, no. 1, pp. 38–56. (in Russ.)

Информация об авторах

Аркадий Николаевич Соловьев, доктор физико-математических наук, профессор
Ростислав Викторович Киричевский, кандидат технических наук, доцент

Information about the Authors

Arkady N. Soloviev, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor
Rostislav V. Kirichevsky, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor

Статья поступила в редакцию 11.09.2021;
одобрена после рецензирования 01.12.2021; *принята к публикации 01.12.2021*
The article was submitted 11.09.2021;
approved after reviewing 01.12.2021; *accepted for publication 01.12.2021*