

УДК 551.466.62  
DOI 10.25205/1818-7900-2020-18-4-39-53

## Волновая энергия цунами

А. Г. Марчук

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН  
Новосибирск, Россия*

### *Аннотация*

Представлены базовые формулы для подсчета энергии движущейся длинной волны. В работе рассматриваются вопросы, связанные с подсчетом волновой энергии во время численного моделирования генерации и распространения волн цунами. Посредством серии вычислительных экспериментов изучена направленность излучения энергии волны цунами, генерированной эллипсоидным источником с различным соотношением длин осей. Рассмотрена направленность излучения волновой энергии дипольным очагом, состоящим из двух эллипсоидных источников с противоположным знаком смещения водной поверхности.

### *Ключевые слова*

волна цунами, энергия волны, направленность излучения волновой энергии, источник цунами

### *Благодарности*

Исследование выполнено в рамках Государственной бюджетной программы с ИВММГ СО РАН (№ 0315-2019-0005)

### *Для цитирования*

Марчук А. Г. Волновая энергия цунами // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2020. Т. 18, № 4. С. 39–53. DOI 10.25205/1818-7900-2020-18-4-39-53

## The Tsunami Wave Energy

A. G. Marchuk

*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS  
Novosibirsk, Russian Federation*

### *Abstract*

The basic formulae for calculating the moving long wave energy were derived and presented. The problems related to the energy counting in the course of numerical modeling of tsunami wave generation and propagation. Through a number of computational experiments, the wave energy radiation directivity of tsunami generated by an ellipsoidal source with a various axis length ratio was studied. The wave energy radiation directivity of the dipole tsunami source consisting of two ellipsoidal sources with opposite sign of the water surface displacement is considered.

### *Keywords*

tsunami wave, directivity of the wave energy radiation, tsunami source

### *Acknowledgements*

The research proposed was made under the State Budget Program with ICMMG SB RAS (no. 0315-2019-0005)

### *For citation*

Marchuk A. G. The Tsunami Wave Energy. *Vestnik NSU. Series: Information Technologies*, 2020, vol. 18, no. 4, p. 39–53. (in Russ.) DOI 10.25205/1818-7900-2020-18-4-39-53

© А. Г. Марчук, 2020

## Введение

Волна цунами является океанской волной, распространяющейся под действием силы гравитации. Источником такой волны является вертикальное смещение участка водной поверхности (вверх или вниз). Такого рода смещение может породиться, например, землетрясением, донным оползнем или обвалом большой массы грунта с берега в океан, падением в океан небесного тела. Последнее происходит крайне редко, хотя может породить волны высотой в сотни метров. Известны также случаи возникновения так называемых метеоцунами вследствие смещения водной поверхности из-за пониженного атмосферного давления в центре циклона или тайфуна [1]. Но такие цунами не представляют серьезной опасности.

После вывода из равновесия водной поверхности последняя обладает потенциальной энергией, которая затем доставляется в различные точки акватории в виде волн цунами. Таким образом, волна цунами – это способ передачи энергии от источника (очага) до других точек в океане.

### 1. Параметры течения при распространении цунами

Волны цунами, генерируемые вертикальным смещением больших участков океанического дна вследствие сильных подводных землетрясений, относятся к категории длинных волн, длина которых как минимум на порядок больше глубины. Для моделирования распространения таких волн в глубоком океане, где амплитуда волны обычно на два порядка меньше глубины, используется линейная (линеаризованная) система дифференциальных уравнений мелкой воды [2]. Корректность такого описания многократно подтверждена при моделировании реальных цунами. Одномерная система таких уравнений, где не учитываются внешние силы (кроме гравитации) может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (Du)}{\partial x} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь  $u$  – горизонтальная скорость водного потока, постоянная во всем слое от поверхности до дна,  $\eta$  – смещение водной поверхности относительно нулевого уровня,  $g$  – ускорение свободного падения,  $D$  – глубина. В рамках этой модели на скорость распространения волны не влияют ее параметры (длина и амплитуда), а сама скорость находится по формуле Лагранжа [2]

$$c = \sqrt{gD}. \quad (1.3)$$

Кинематика фронта волны цунами над неровным дном определяется формулой (1.3). Здесь волновой фронт может быть определен как граница между частью акватории, где вода находится в покое (все параметры волны равны нулю), и той частью, где к этому моменту водная поверхность отклонилась от нулевого уровня ( $\eta \neq 0$ ). Для более точного описания динамики длинной волны при ее приближении к берегу, где глубина становится меньше, а высота волны возрастает, лучше использовать нелинейную систему уравнений мелкой воды [3; 4], которая в одномерном случае записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial((D + \eta)u)}{\partial x} = 0. \quad (1.5)$$

Скорость распространения волн, описываемых уравнениями (1.4), (1.5), определяется формулой

$$c = \sqrt{g(D + \eta)}. \quad (1.6)$$

Из формулы (1.6) видно, что скорости гребня и фронта волны различны, при этом гребень волны, где возвышение поверхности максимально на протяжении всей длины волны, со временем догоняет фронт. В тот момент, когда гребень обгоняет фронт, происходит обрушение волны. При распространении волны по глубокому океану этот эффект проявляется крайне слабо даже при пересечении волной всей акватории Тихого океана. Далее в тексте под скоростью распространения будет пониматься именно скорость *фронта* волны, не зависящая, согласно (1.3), от длины и амплитуды и определяемая исключительно глубиной океана там, где она движется в данный момент. Тот факт, что скорость распространения волнового фронта цунами не зависит от ее параметров, дает возможность заранее выявить некоторые особенности поведения таких волн в областях с переменной глубиной.

Особенности процесса распространения длинных волн в рамках модели мелкой воды позволяют найти связь между параметрами цунами и донным рельефом акватории. Учитывается, в частности, то, что горизонтальная скорость водного потока в волне цунами постоянна во всей толще от дна до поверхности [2]. Соотношения, которые будут получены в этом параграфе, являются справедливыми для волн, описываемых линеаризованными уравнениями мелкой воды. Можно также заметить, что эти же соотношения с точностью до малых второго порядка будут справедливы и для волн, описываемых системой нелинейных уравнений мелкой воды, при распространении цунами в относительно глубокой воде, где глубина как минимум на два порядка больше амплитуды волны.

В первую очередь найдем связь глубины  $D$  с высотой волны  $\eta$  и скоростью водного потока  $u$  в ней. Это соотношение можно получить явным образом из уравнений (1.1), (1.2). Мы уже знаем, что в рамках этой линеаризованной модели мелкой воды волна распространяется со скоростью, определяемой из (1.3). Представим движущуюся волну в виде гармонической функции

$$\eta = a \cdot \cos(kx - \omega t), \quad (1.7)$$

описывающей волну высотой  $a$ , распространяющуюся со скоростью  $c = \omega/k$  в сторону возрастания  $x$  координаты. Подставив выражение для смещения водной поверхности (1.7) в уравнение (1.1), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = gka \sin(kx - \omega t). \quad (1.8)$$

После интегрирования по  $t$  обеих частей уравнения (1.8) получается зависимость скорости потока в волне от ее амплитуды и глубины

$$u = \int \frac{gk}{-\omega} a \sin(kx - \omega t) d(kx - \omega t) = \frac{g}{c} (a \cos(kx - \omega t)) = \frac{g}{\sqrt{gD}} \eta = \eta \sqrt{\frac{g}{D}}. \quad (1.9)$$

Таким образом, скорость водного потока в гармонической волне вида (1.7) связана с глубиной и высотой волны формулой (1.9). В силу линейности процесса эта формула будет справедлива для любой длинной волны, которая может быть представлена в виде суперпозиции гармонических волн разной частоты, являющихся решением системы дифференциаль-

ных уравнений мелкой воды (1.1), (1.2). А для квазилинейной системы уравнений мелкой воды (1.4), (1.5), где, согласно формуле (1.6), скорость фронта и гребня волны несколько различаются, горизонтальная скорость потока в движущейся волне выразится в виде

$$u = \eta \sqrt{\frac{g}{D + \eta}}, \quad (1.10)$$

где  $\eta$  – высота волны,  $D$  – глубина,  $g$  – ускорение силы тяжести.

Теперь рассмотрим составляющие энергии движущейся волны цунами. С учетом формулы (1.10) выражение для кинетической энергии одномерной волны цунами запишется в виде интеграла по длине волны  $L$

$$E_K = \int_0^L \frac{\rho u^2}{2} (D + \eta) dx = \int_0^L \frac{\rho \eta^2}{2} \frac{g}{(D + \eta)} (D + \eta) dx = \int_0^L \frac{\rho \eta^2}{2} dx, \quad (1.11)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости. Запишем также выражение для потенциальной энергии, считая, что потенциальная энергия покоящейся жидкости равна нулю:

$$E_P = \int_0^L \frac{\rho g \eta^2}{2} dx. \quad (1.12)$$

Если сравнить подынтегральные выражения в формулах для кинетической (1.11) и потенциальной (1.12) энергии движущейся волны цунами, то видим их тождественное равенство. Это значит, что в любом сегменте движущейся волны цунами полная волновая энергия в равных долях распределена между кинетической и потенциальной энергией. В двумерном случае вектор скорости горизонтального водного потока является двухкомпонентным, и при подсчете кинетической энергии волны по формуле (1.11) под скоростью  $u$  следует понимать модуль вектора скорости.

## 2. Трансформация энергии в волне цунами

Как уже отмечалось, в момент генерации волны цунами вся ее энергия состоит из потенциальной энергии начального вертикального смещения волновой поверхности, которую трудно оценить, вычислив интеграл по всей площади очага  $S$ :

$$E_P = \int_0^S \frac{\rho g \eta^2}{2} dx. \quad (2.1)$$

Затем во время формирования распространяющейся волны цунами эта энергия перераспределится на кинетическую энергию водного течения в волне и потенциальную энергию смещения поверхности в волне относительно невозмущенного состояния. При этом в соответствии с (1.11) и (1.12) обе части полной энергии распространяющейся волны равны между собой. Полную энергию распространяющейся длинной волны во время численного моделирования легко посчитать, суммируя на каждом шаге по времени кинетическую и потенциальную энергию, проходящую через выбранное сечение (в одномерном случае) или через контур (в двумерном случае). В последнем случае такой подсчет осуществить значительно сложнее. Здесь надо учитывать вектор направления движения волны, который определяется компонентами скорости водного потока в волне.

Как уже было замечено, при взаимодействии волны с другой волной или с каким-либо препятствием (в то числе с берегом) соотношение между двумя видами энергии (кинетической и потенциальной) может меняться. Например, при отражении волны цунами от вертикальной стенки большая часть кинетической энергии переходит в потенциальную. Если про-

филь волны до столкновения со стенкой был симметричным относительно гребня волны (где достигается максимум высоты), тогда в момент достижения гребнем волны стенки происходит полная остановка водного потока, т. е. практически вся энергия волны становится потенциальной. Рассмотрим пример. Пусть в одномерной области с постоянной глубиной  $D_0$  длинная волна приближается к правой границе, являющейся полностью отражающей вертикальной стенкой. Волна была генерирована при помощи граничных условий на левой границе

$$\eta(t) = \left(1 - \cos\left(\frac{t \cdot 2\pi}{tp}\right)\right) / 2, \quad t = (0, tp), \quad (2.2)$$

$$u(t) = \eta(t) \sqrt{\frac{g}{D_0}}. \quad (2.3)$$

Здесь  $tp$  – это период волны. Из формул (2.2) и (2.3) видно, что профиль этой волны является симметричным относительно точки гребня, а ее максимальная высота равна 1 м.

На рис. 1, *a, b* показан профиль длинной волны при ее приближении к вертикальной стенке, а рис. 1, *c* фиксирует момент наивысшего заплеска, когда скорость водного потока везде в расчетной области близка к нулю (небольшие флуктуации скорости течения возможны из-за погрешностей численного метода). Следовательно, в этот момент вся кинетическая энергия перешла в потенциальную. Ширина области вертикального смещения водной поверхности около стенки составила половину длины исходной волны, а высота – вдвое больше. О такой возможности трансформации одного вида энергии в другой при взаимодействии цунами с препятствиями было сказано ранее.

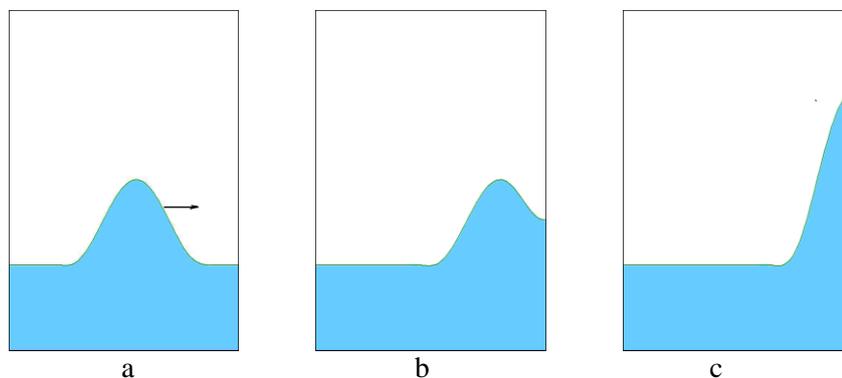


Рис. 1. Результаты численного моделирования отражения длинной волны от вертикальной стенки  
Fig. 1. The result of numerical modeling of long wave reflection from vertical wall

Если рассмотреть процесс столкновения двух одинаковых волн, идущих навстречу друг другу, то он абсолютно идентичен рассмотренному отражению волны от вертикальной стенки. Для получения положений водной поверхности в этом случае надо добавить к рис. 1, *a–c* их зеркальное отражение относительно правой границы этих рисунков. В обоих случаях высота волны в момент полной остановки течения вдвое превышает исходную высоту волны (при столкновении со стенкой) или волн, движущихся навстречу друг другу. После этого момента процесс разворачивается в обратном направлении. Это значит, что в этой фазе процесса в левой полуобласти сначала водная поверхность имела вид, изображенный на рис. 1, *c*, затем на рис. 1, *b* и, наконец, на рис. 1, *a*. Непосредственный подсчет волновой энергии до момента и в сам момент столкновения (отражения) волны по формулам (1.11)–

(1.13) показывает постоянство полной энергии волны даже в момент полной остановки водного течения.

Рассмотрим теперь случай столкновения двух волн с амплитудой, имеющей противоположный знак, но с одинаковой длиной. От правой границы одномерной области движется волна, параметры которой задаются формулами (2.2) и формулой, аналогичной (2.3), но здесь скорость водного потока направлена справа налево:

$$u(t) = -\eta(t) \sqrt{\frac{g}{D_0}}, \quad t = (0, tp). \quad (2.4)$$

Навстречу этой волне от левой границы движется волна, форма которой выражается формулой

$$\eta(t) = -\left(1 - \cos\left(\frac{t \cdot 2\pi}{tp}\right)\right) / 2, \quad (2.5)$$

а скорость водного потока – формулой (2.3). Ввиду того, что амплитуда этой волны отрицательна, скорость водного потока в ней будет в точности соответствовать скорости встречной волны (и по направлению тоже). В момент столкновения описанных двух волн высоты и скорости водного потока будут суммироваться, и в результате в момент наложения одной волны на другую водная поверхность становится невозмущенной, а скорость водного потока становится вдвое больше, чем в волне, идущей от правой границы. В соответствии с формулами (1.11), (1.12) полная волновая энергия не изменится. На рис. 2 показаны моменты взаимодействия двух встречных длинных волн с противоположной амплитудой.

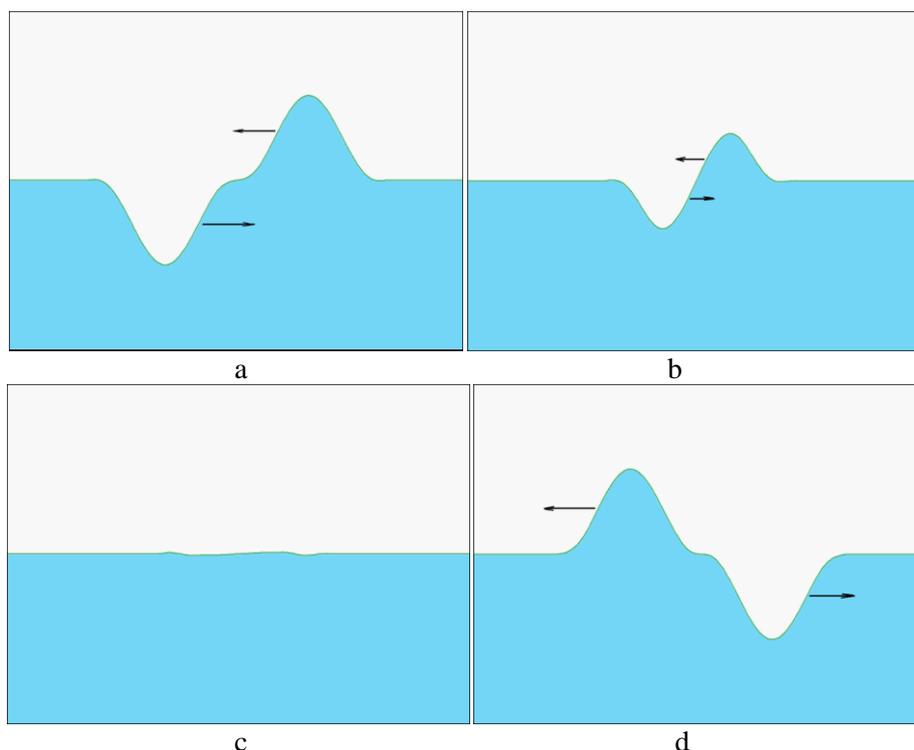


Рис. 2. Взаимодействие двух встречных длинных волн с противоположной амплитудой.

Стрелками обозначены направления движения волн

Fig. 2. Interaction of two oncoming long waves with opposite amplitude.

Arrows indicate directions of wave motion

На рис. 2, с представлен момент, когда смещения водной поверхности практически не наблюдаются, при этом на протяжении всей длины исходной волны происходит горизонтальное движение водного слоя. Результаты численного моделирования подтвердили тот факт, что при взаимодействии двух встречных волн с амплитудами противоположного знака в какой-то момент вся энергия волны переходит в кинетическую энергию течения водного слоя от поверхности до дна. После этого вновь возникают две бегущие в разные стороны волны, где кинетическая энергия и потенциальная энергия распределены в равных долях.

### 3. Подсчет энергии цунами при численном моделировании

Теперь обсудим вопрос о способах подсчета энергии волны цунами при численном моделировании. В настоящее время динамика процесса распространения волн цунами рассчитывается в областях, где изначально задается глубина, а параметры течения рассчитываются в узлах, как правило, регулярной сетки. Следовательно, для того чтобы вычислить энергию распространяющейся длинной волны в некоторой подобласти, требуется просуммировать волновую энергию по всем ячейкам сетки, полагая постоянство параметров волны по всей площади ячейки. Для проверки такого способа оценки энергии волны был проведен численный расчет распространения цунами от круглого модельного источника с радиусом 50 км в двумерной прямоугольной области  $1000 \times 1000$  км на расчетной сетке с разрешением 1 км. Моделирование проводилось в рамках двумерной системы дифференциальных уравнений мелкой воды

$$\begin{aligned} H_t + (uH)_x + (vH)_y &= 0, \\ u_t + uu_x + vu_y + gH_x &= gD_x, \\ v_t + uv_x + vv_y + gH_y &= gD_y, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $H(x, y, t) = \eta(x, y, t) + D(x, y, t)$  – полная толщина водного слоя,  $\eta(x, y, t)$  – вертикальное смещение водной поверхности (высота волны),  $D(x, y)$  – глубина,  $u$  и  $v$  – компоненты вектора скорости водного потока,  $g$  – ускорение силы тяжести.

Для численных расчетов был использован метод MOST [5], который сейчас применяется значительным числом исследователей во многих странах. В первом вычислительном эксперименте глубина в области линейно возрастала от верхней границы по формуле  $D(x, y) = 0.005 \cdot y$ , где  $y$  – это расстояние до верхней границы области. Центр источника располагался в точке (500 км, 300 км). Начальное смещение водной поверхности в источнике задавалось формулой

$$\eta(r) = \eta_0 \cdot \cos\left(\pi \frac{r}{r_0}\right), \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad (3.2)$$

где  $\eta_0$  – высота начального смещения поверхности в центре источника,  $r_0$  – радиус источника, а  $r$  – расстояние до центра источника. В данном расчете начальная высота в центре источника была равна 2 м. На рис. 3 показано положение источника ( $a$ ) и водная поверхность через 2000 и 4000 с после момента генерации (соответственно  $b$  и  $c$ ).

Кинетическая и потенциальная энергия во всей расчетной области, а также полная волновая энергия вычислялась через каждые 400 с путем суммирования по площади. Если потенциальная энергия 1  $\text{дм}^3$  воды, центр тяжести которого поднят на высоту 1 м, равна 1 Дж, тогда в этом вычислительном эксперименте в начальный момент вся энергия, состоящая из потенциальной энергии начального смещения водной поверхности в источнике, равна приблизительно  $7.7968 \cdot 10^{13}$  Дж. Через 400 с кинетическая энергия стала равной  $4.512362 \cdot 10^{13}$  Дж, а потенциальная снизилась до  $3.182074 \cdot 10^{13}$  Дж. Еще через 400 с соотно-

шение кинетической и потенциальной энергии стало  $3.957186 \cdot 10^{13}$  и  $3.735473 \cdot 10^{13}$ . Только по истечении 1000 с величины этих видов энергий примерно сравниваются. При этом полная энергия волновых движений во всей расчетной области в течение 2400 с снижается с  $7.7968 \cdot 10^{13}$  до  $7.682803 \cdot 10^{13}$  Дж из-за численной диссипации, которая присуща большинству численных методов.

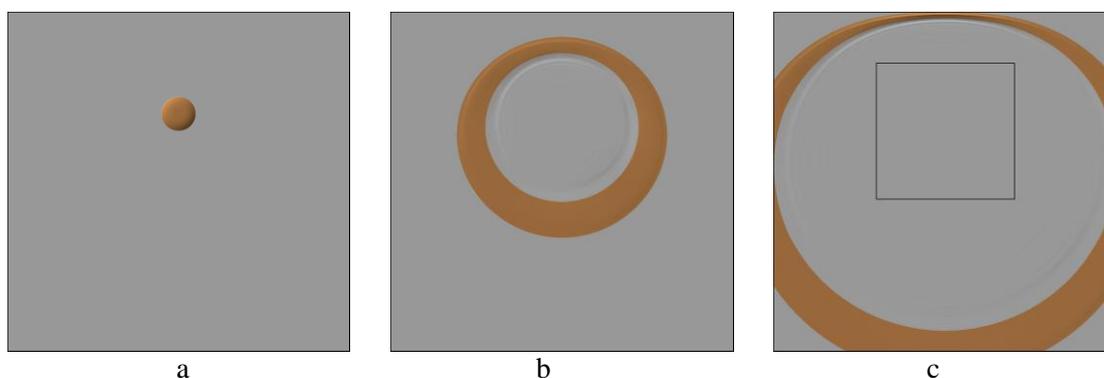


Рис. 3. Водная поверхность в разные моменты распространения цунами от круглого источника в области с наклонным дном. Более темным цветом отображается водная поверхность выше нулевого уровня  
 Fig. 3. Water surface at different time of tsunami propagation from round source in an area with sloping bottom. A darker color shows the water surface above zero

Энергию также можно подсчитывать, суммируя кинетическую и потенциальную энергию волны, прошедшей через некоторый контур (замкнуты или незамкнутый). Такой способ очень удобен в одномерном случае, когда в какой-либо точке на пути следования цунами энергия подсчитывается по формулам

$$E_p = \int_0^T \frac{\rho g \eta^2(t)}{2} \cdot \sqrt{g(D + \eta)} dt, \quad (3.3)$$

$$E_k = \int_0^T \frac{\rho u^2(t)}{2} (D + \eta) \cdot \sqrt{g(D + \eta)} dt. \quad (3.4)$$

Например, при генерации длинной волны с помощью граничных условий очень легко подсчитывать энергию волны, которая будет распространяться от этой границы внутрь области. В одномерных расчетах, результаты которых представлены на рис. 1 и 2, генерация волны осуществлялась при помощи граничных условий, где на каждом шаге по времени в граничном расчетном узле устанавливалось значение высоты волны и соответствующая скорость водного потока (см. формулу (1.10)).

В задаче с круглым источником над наклонным дном, результаты которой визуализированы на рис. 3, можно вычислить энергию волны, прошедшей через прямоугольный контур, построенный вокруг источника цунами (рис. 3, c), и после этого сравнить полученную величину с потенциальной энергией начального смещения водной поверхности. После выхода образовавшейся волны цунами за пределы этого прямоугольного контура величины кинетической, потенциальной и полной волновой энергии волны, прошедшей сквозь обозначенный контур, составили соответственно  $3.9602147 \cdot 10^{13}$ ,  $3.8256030 \cdot 10^{13}$  и  $7.7858177 \cdot 10^{13}$  Дж (при потенциальной энергии начального смещения водной поверхности  $7.7968 \cdot 10^{13}$  Дж). Видно,

что эти величины соответствуют оценкам, полученным суммированием по площади расчетной области.

Иногда для оценки параметров волн цунами при ее распространении в двумерной области применяется лучевое приближение [6; 7], когда область разбивается на «лучевые трубки», внутри которых волновая энергия остается постоянной.

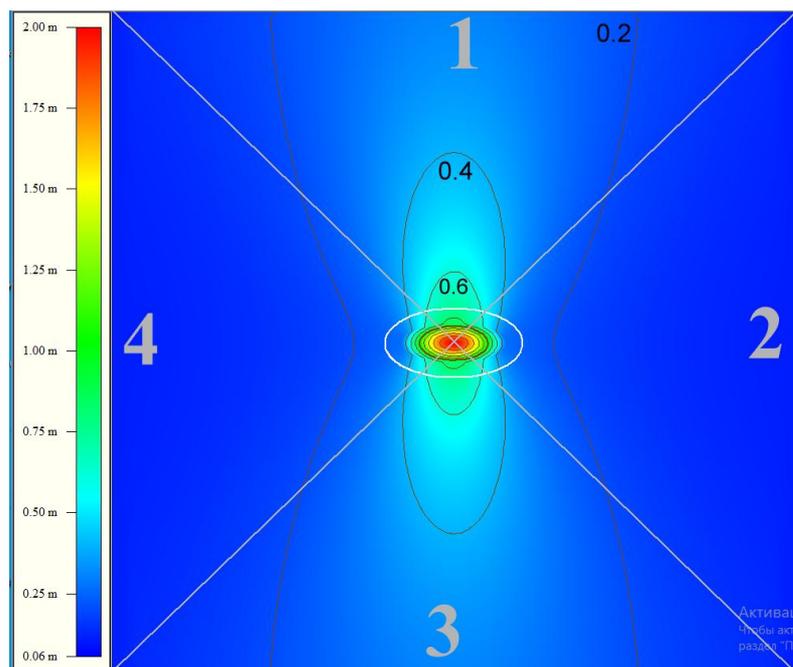
#### 4. Направленность излучения волновой энергии вытянутым очагом

При моделировании распространения цунами от очагов различной формы большое значение имеет информация о направленности излучения волновой энергии. Проведем серию расчетов, в ходе которых будет исследована направленность распространения волновой энергии цунами от эллипсоидных очагов с различным соотношением длин осей. Центры эллипсоидных источников цунами совпадают с центром области. Распределение высоты начального поднятия водной поверхности внутри очага (эллипса с длинами осей  $2r_1$  и  $2r_2$ ) задавалось по формуле

$$\eta = \frac{\eta_0}{2} \left( 1 + \cos \left( \sqrt{\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2}} \right) \cdot \pi \right). \quad (4.1)$$

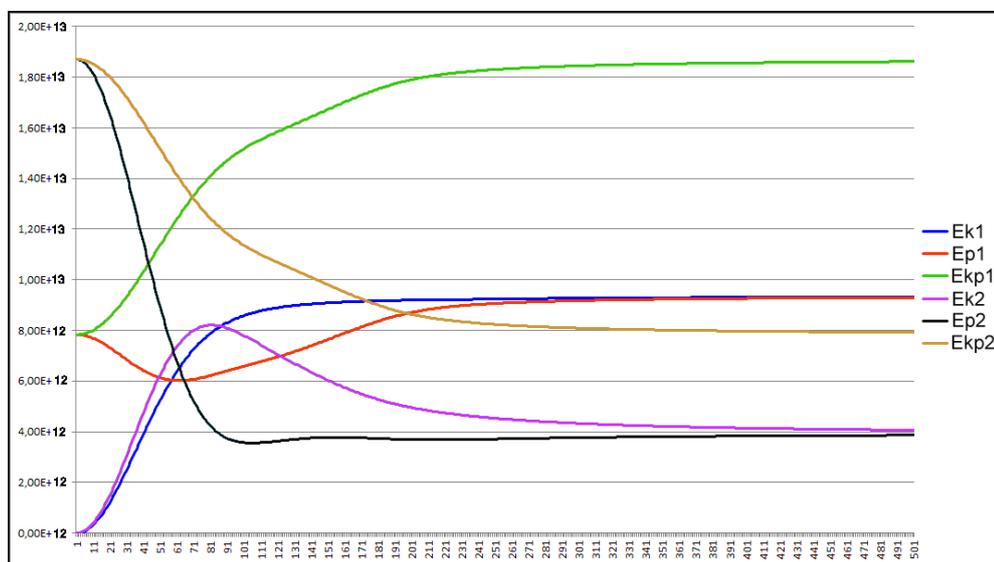
При соотношении длин осей 1 : 1 эллипсоидный очаг цунами имеет форму круга. Ясно, что в этом случае волновая энергия будет излучаться равномерно во всех направлениях. Поэтому начнем серию вычислительных экспериментов с эллипсоидного очага с соотношением сторон 2 : 1. Как и в разделе 3, расчет проводился области  $1000 \times 1000$  км на расчетной сетке с разрешением 1 км. Короткая ось эллипса имела длину 100 км, а длинная ось была направлена параллельно оси абсцисс, ее длина менялась и в первом эксперименте составила 200 км. В ходе численного расчета вычислялись потенциальная, кинетическая и полная волновая энергия, излученная в разных направлениях. Для этого вся квадратная расчетная область разделена на 4 одинаковых по площади сектора, ограниченных отрезками, соединяющими центр области с ее углами. На рис. 4 они пронумерованы цифрами от 1 до 4. В каждом секторе энергия суммировалась по всем ячейкам расчетной сетки в предположении, что параметры волны неизменны в пределах одной ячейки. Рисунок 4 показывает расположение этих секторов, очертания эллипсоидного очага (нарисовано белым цветом), а также распределение максимумов высоты цунами от модельного эллипсоидного источника с длинами осей 200 и 100 км. Также приведены изолинии этого распределения с шагом 0,2 м в интервале от 0 до 2,0 м. Расположение и нумерация секторов останутся неизменными и во всех последующих вычислительных экспериментах.

Из рисунка 4 видно, что в сторону секторов 1 и 3 распространяются волны со значительно большей амплитудой, чем в направлении секторов 2 и 4. Возникает вопрос о соотношении волновой энергии, оказавшейся в разные моменты времени в разных секторах. Рисунок 5 показывает поведение величины кинетической  $E_{k1}$  и  $E_{k2}$  (синий цвет для сектора 1 и фиолетовый для сектора 2), потенциальной  $E_{p1}$  и  $E_{p2}$  (красный цвет для сектора 1 и черный для сектора 2) и полной энергии волны цунами  $E_{kp1}$  и  $E_{kp2}$  (соответственно зеленый и коричневый) в результате ее генерации эллипсоидным источником размером  $200 \times 100$  км. В начальный момент вся энергия цунами равна потенциальной энергии вертикального смещения водной поверхности и начинает убывать по мере формирования волны. Вдоль горизонтальной шкалы показан номер шага по времени.



*Рис. 4.* Расположение секторов для исследования направленности излучения волновой энергии цунами от эллипсовидного источника с соотношением длин осей 2 : 1 (200 × 100 км). Белым цветом нарисована граница начального смещения водной поверхности

*Fig. 4.* Location of sectors for counting the tsunami wave energy radiation directivity from ellipsoidal source with axis length ratio of 2 : 1 (200 per 100 km). The boundary of the initial water surface displacement is drawn in white



*Рис. 5.* Поведение во времени потенциальной, кинетической и полной волновой энергии в секторах 1 и 2 при генерации волны эллипсовидным очагом с длинами осей 200 и 100 км

*Fig. 5.* Time behavior of potential, kinetic and full wave energy in sectors 1 and 2 when generating a wave by an ellipsoidal source with axes lengths of 200 and 100 km

Из рис. 5 видно, что в процессе формирования бегущей волны кинетическая энергия  $E_{k1}$  в секторе 1 начинает расти от нулевого значения в начальный момент до значений примерно  $9,3 \times 10^{13}$  Дж и сравнивается с величиной потенциальной энергии жидкости  $E_{p1}$ , находящейся в секторе 1. Соответственно в секторе 2 изначально нулевая кинетическая энергия  $E_{k2}$  сравнивается с потенциальной  $E_{p2}$  на значении примерно  $4,0 \times 10^{13}$  Дж. Интерес вызывает тот факт, что в процессе формирования движущейся волны кинетическая энергия  $E_{k2}$  через 80 шагов по времени (320 с) достигает максимального значения, а затем постепенно убывает и сравнивается с кинетической энергией (см. рис. 5). В секторе 1 рост кинетической энергии является монотонным. С потенциальной энергией  $E_{p1}$  и  $E_{p2}$  дело обстоит противоположным образом. В секторе 2 величина энергии  $E_{p2}$  монотонно уменьшается от значения  $7,8 \times 10^{13}$  Дж, а в секторе 1 энергия  $E_{p1}$  сначала уменьшается, а затем начинает расти и сравнивается со значением  $E_{k1}$  на уровне  $9,3 \times 10^{13}$  Дж. Если говорить о соотношении волновой энергии в секторах 1 и 2, то видно, что полная волновая энергия в секторе 1 ( $E_{kp1}$ ) монотонно растет до значения  $1,86 \times 10^{14}$  Дж. А полная энергия  $E_{kp2}$  в секторе 2 монотонно убывает до значения  $7,92 \times 10^{13}$  Дж на протяжении всего процесса формирования и распространения волны в расчетной области до момента начала выхода ее оттуда. Интересно заметить, что к моменту начала выхода волны из расчетной области **полная волновая энергия** в секторе 1 ( $E_{kp1}$ ) становится равной начальной **потенциальной энергии** в секторе 2. И, наоборот, значение полной волновой энергии  $E_{kp2}$  сравнивается начальной потенциальной энергии в секторе 1. Из-за симметрии задачи волновая энергия в секторе 3 равна энергии в секторе 1, а величина энергии в секторе 2 соответствует сектору 4. Поэтому поведение волновой энергии в секторах 3 и 4 не рассматривается.

Графики подтверждают справедливость формул (1.11) и (1.12), показывающих равенство кинетической и потенциальной энергии в движущейся длинной волне. Убывание энергии после 800 расчетных шагов (3200 с) объясняется тем, что в этот момент волна начинает покидать расчетную область.

Для дальнейшего исследования направленности излучения волновой энергии цунами в разных направлениях проведены расчеты распространения цунами от эллипсовидных источников, имеющих размеры  $300 \times 100$  и  $400 \times 100$  км. Распределение максимумов высоты цунами для очага  $400 \times 100$  км с максимальным возвышением в центре, равным 2 м, приведено на рис. 6. Темным цветом представлены изолинии распределения максимумов высоты волны с интервалом 0,2 м. Здесь же белой линией обозначена граница очага. При сравнении рис. 4 и 6 видно, что в случае более вытянутого источника высота цунами, идущих в направлении нижней и верхней границ, значительно больше аналогичных волн в случае соотношения длин осей 2 : 1 и на порядок выше волн, распространяющихся в направлении левой и правой границ, в обоих случаях. В частности для очага  $400 \times 100$  км высота волны в центре верхней (нижней) границы области равна 0,5 м, что примерно вдвое превышает высоту цунами там же при размерах очага  $200 \times 100$  км.

Графики изменения во времени кинетической, потенциальной и полной волновой энергии в секторах 1 и 2 приводятся на рис. 7. Видно, что, как и для случая менее вытянутого очага (см. рис. 5), по мере формирования волны величины кинетической и потенциальной энергии во всех секторах сближаются и становятся равными между собой. При этом, как и в случае эллипсовидного источника, полная волновая энергия  $E_{kp1}$  в секторе 1 в итоге становится равной начальной потенциальной энергии  $E_{p2}$  секторе 2. И наоборот, полная волновая энергия  $E_{kp2}$  в секторе 2 постепенно становится равной начальной потенциальной энергии  $E_{p1}$  в секторе 1.

Последним вычислительным экспериментом будет моделирование генерации и распространения цунами от дипольного источника, состоящего из двух эллипсов, в одном из которых смещение водной поверхности совпадает с источником  $400 \times 100$  км, где в одной части источника распределение начального смещения дается формулой (4.1). Вторая часть источника имеет такую же форму, но вертикальное смещение там имеет обратный знак. Из форму-

лы (2.1) следует, что потенциальная энергия обеих частей этого дипольного источника одинакова. Центр положительного крыла источника имеет координаты (500 км, 550 км), а центр отрицательного – (500 км, 450 км). Расположение дипольного источника и распределение максимумов высоты волны приводятся на рис. 8.

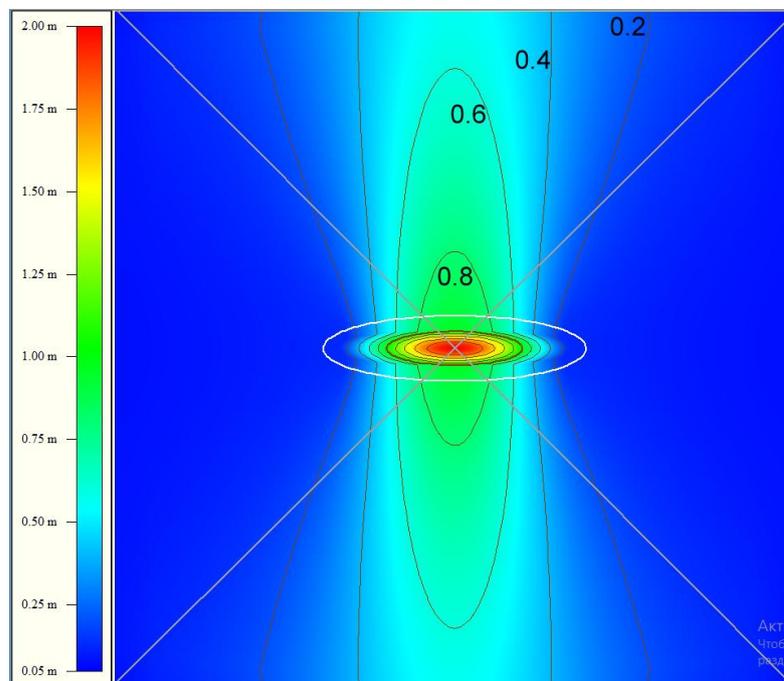


Рис. 6. Распределение максимумов высоты цунами генерированной эллипсоидным источником размером  $400 \times 100$  км. Белым цветом показаны границы начального смещения водной поверхности

Fig. 6. The height maxima distribution of tsunamis generated by an ellipsoid source of size 400 per 100 km. White line shows the boundaries of the water surface initial displacement

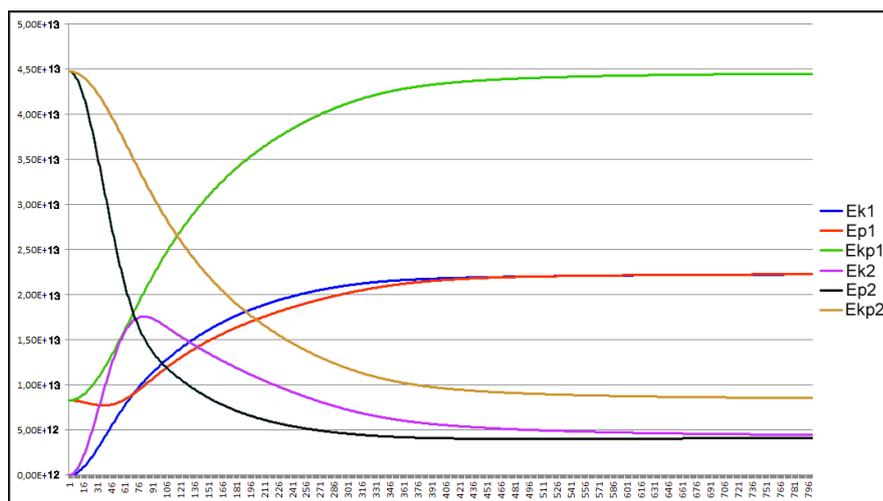
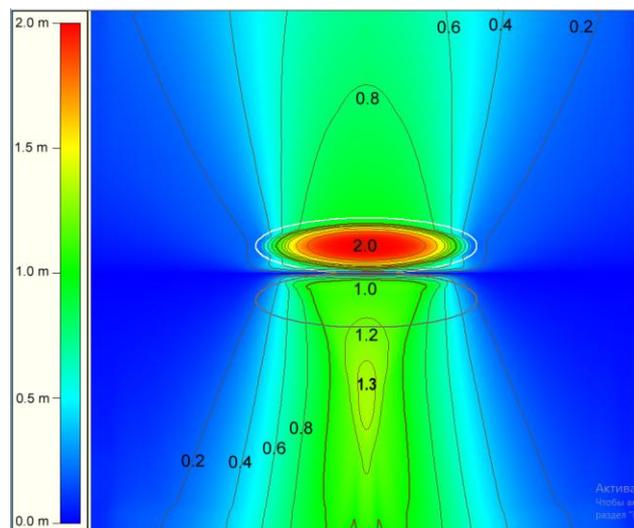


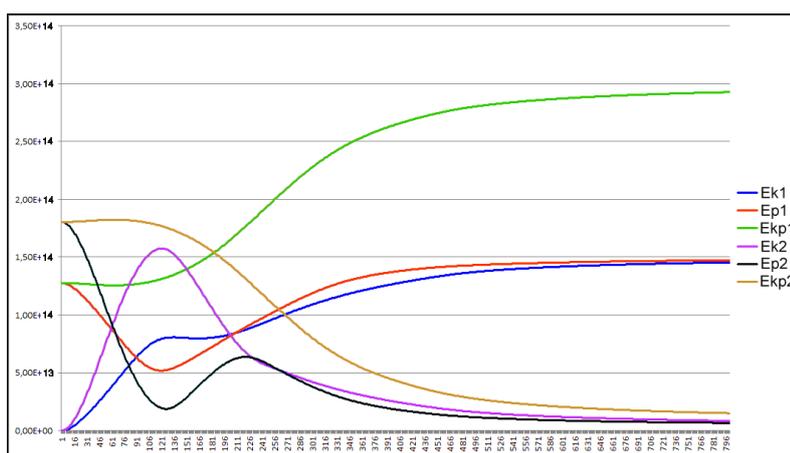
Рис. 7. Поведение во времени потенциальной, кинетической и полной волновой энергии в секторах 1 и 2 при генерации волны эллипсоидным очагом с длинами осей 400 и 100 км

Fig. 7. Time behavior of potential, kinetic and full wave energy in sectors 1 and 2 when tsunami is generated by an ellipsoidal source with axes lengths of 400 and 100 km



*Рис. 8.* Распределение максимумов высоты волны цунами, генерированной дипольным очагом, состоящим из двух эллипсовидных источников, имеющих начальные смещения с противоположным знаком. Граница положительного крыла очага обозначена белым цветом, а отрицательного – серым  
*Fig. 8.* Distribution of tsunami wave height maxima generated by dipole source consisting of two ellipsoidal sources having initial displacements with opposite sign. The boundary of the positive wing of the source is indicated in white, and the negative – in gray

Здесь интересно отметить, что волны большей амплитуды распространяются в сторону нижней границы области, в которой изначально располагалось отрицательное крыло дипольного источника. Это объясняется эффектом фокусировки цунами вследствие геометрии начального очага [8; 9]. Кроме этого, из-за обратной симметрии источника относительно линии  $y = 500$  км на этой линии вертикальное смещение водной поверхности равно нулю в любой момент времени. Графики поведения волновой энергии в этом случае (кинетической, потенциальной и суммарной) в разных секторах расчетной области приводятся на рис. 9.



*Рис. 9.* Графики изменения во времени потенциальной  $E_p$ , кинетической  $E_k$  и полной волновой энергии  $E_{kp}$  в секторах 1 и 2 при генерации волны дипольным очагом, состоящим из двух эллипсовидных источников с длинами осей 400 и 100 км с начальным смещением поверхности в них с противоположным знаком  
*Fig. 9.* Time behavior of potential  $E_p$ , kinetic  $E_k$  and full wave energy  $E_{kp}$  in sectors 1 and 2 when tsunami is generated by the dipole tsunami source consisting of two ellipsoidal sources with axes lengths of 400 and 100 km having opposite signs of surface displacement

Поведение во времени разных видов энергии волны, приведенное на рис. 9, несколько отличается от случаев положительных источников эллипсоидной формы (см. рис. 5 и 7). Интерес вызывает значительный рост кинетической энергии в секторе 2 ( $E_{k2}$ ) от нуля в начальный момент и примерно до  $1.6 \times 10^{14}$  Дж на 120-м шаге по времени (480 с от начала расчета), что даже превышает окончательное значение кинетической энергии в секторе 1. Затем энергия  $E_{k2}$  постепенно снижается и к моменту выхода цунами из расчетной области составляет  $8.4 \times 10^{12}$  Дж.

### Заключение

Доля кинетической энергии воды, приведенной в движение распространяющейся волной цунами, в общем балансе составляет половину общей энергии волны. Кинетическая энергия волны переходит в потенциальную и обратно только в случае взаимодействия цунами с препятствиями (в том числе с берегом) или с другой волной. Во время численного моделирования энергию волны можно вычислять либо суммированием по площади, либо в процессе прохождения волны сквозь заданный контур. Направленность излучения волновой энергии источником сильно зависит от его вытянутости. В частности, для эллипсоидного источника цунами отношение полной волновой энергии в секторах 1 и 2 (см. рис. 4) в процессе распространения волны становится **обратным** отношению потенциальной энергии начального вертикального смещения водной поверхности в этих секторах.

### Список литературы

1. **Рабинович А. Б., Шепич Я.** Метеорологические цунами: что это такое? // Природа. 2016. № 1. С. 12–26.
2. **Стокер Дж. Дж.** Волны на воде. М.: ИЛ, 1959. 617 с.
3. **Вольцингер Н. Е., Пясковский Р. В.** Теория мелкой воды: океанологические задачи и численные методы. Л.: Гидрометеиздат, 1977. 207 с.
4. **Synolakis C. E.** Tsunami runup on steep slopes: How good linear theory really is. *Natural Hazards*, 1991, vol. 4 (2), p. 221–234. DOI 10.1007/BF00162789
5. **Titov V., Gonzalez F.** Implementation and testing of the method of splitting tsunami (MOST) model. NOAA Technical Memorandum ERL PMEL-112. USA, 1997.
6. **Марчук Ан. Г.** Вычисление высоты цунами, распространяющейся над наклонным дном, в лучевом приближении // Сиб. журн. вычисл. математики. 2015. Т. 18, № 4. С. 377–388. DOI 10.15372/SJNM20150404
7. **Марчук Ан. Г.** Оценка высоты цунами, распространяющейся над параболическим дном, в лучевом приближении // Сиб. журн. вычисл. математики. 2017. Т. 20, № 1. С. 23–35. DOI 10.15372/SJNM20170103
8. **Marchuk An. G., Titov V. V.** Source configuration and the process of tsunami waves forming. In: Gusiakov V. K. (ed.). *Tsunamis: Their Science and Hazard Mitigation*. Proc. Int. Tsunami Symp. Novosibirsk, Computing Center, Siberian Division, USSR Academy of Sciences, 1989, p. 11–17.
9. **Kanoglu U., Titov V. V., Aydin B., Moore C., Stefanakis T. S., Zhou H., Spillane M., Synolakis C. E.** Focusing of long waves with finite crest over a constant depth. In: *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 2013, A, 469 (2153), 20130015. DOI 10.1098/rspa.2013.0015

### References

1. **Rabinovich A. B., Shepich Ya.** Meteorological tsunamis: what is this? *Priroda*, 2016, no. 1, p. 12–26. (in Russ.)
2. **Stoker J. J.** *Water waves*. Moscow, Foreign Literature Publ., 1959, 617 p. (in Russ.)

3. **Voltsynger N. E., Pyaskovsky R. V.** Shallow-water theory: Oceanological problems and numerical methods. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1977, 207 p. (in Russ.)
4. **Synolakis C. E.** Tsunami runup on steep slopes: How good linear theory really is. *Natural Hazards*, 1991, vol. 4 (2), p. 221–234. DOI 10.1007/BF00162789
5. **Titov V., Gonzalez F.** Implementation and testing of the method of splitting tsunami (MOST) model. NOAA Technical Memorandum ERL PMEL-112. USA, 1997.
6. **Marchuk An. G.** The assessment of tsunami heights above the bottom slope within the wave-ray approach. *Siberian J. Num. Math.*, 2015, vol. 18, no. 4, p. 377–388. (in Russ.) DOI 10.15372/SJNM20150404
7. **Marchuk An. G.** Estimating the Height of a Tsunami Wave Propagating over a Parabolic Bottom in the Ray Approximation. *Siberian J. Num. Math.*, 2017, vol. 20, no. 1, p. 23–35. (in Russ.) DOI 10.1134/S1995423917010037
8. **Marchuk An. G., Titov V. V.** Source configuration and the process of tsunami waves forming. In: Gusiakov V. K. (ed.). *Tsunamis: Their Science and Hazard Mitigation. Proc. Int. Tsunami Symp.* Novosibirsk, Computing Center, Siberian Division, USSR Academy of Sciences, 1989, p. 11–17.
9. **Kanoglu U., Titov V. V., Aydin B., Moore C., Stefanakis T. S., Zhou H., Spillane M., Synolakis C. E.** Focusing of long waves with finite crest over a constant depth. In: *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 2013, A, 469 (2153), 20130015. DOI 10.1098/rspa.2013.0015

*Материал поступил в редколлегию  
Received  
11.08.2020*

### Сведения об авторе

**Марчук Андрей Гурьевич**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (Новосибирск, Россия)

mag@omzg.sccc.ru

SPIN (РИНЦ) 4054-6578

WoS ResearcherID S-9502-2017

Scopus AuthorID 57023485400

### Information about the Author

**Andrey G. Marchuk**, Doctor of Sciences, Senior Researcher, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS (Novosibirsk, Russian Federation)

mag@omzg.sccc.ru

SPIN (РИНЦ) 4054-6578

WoS ResearcherID S-9502-2017

Scopus AuthorID 57023485400